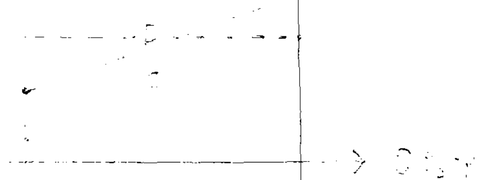
00.12.16　新世紀社会学理論研　　　　　　　　　　　　　　　　　　報告者：神山英紀

群間進化ゲーム・モデルによるNPDの解消

1. 目的と背景

1. 1目的

◇生物としてのヒトの行動の特異性：　「N 人囚人のジレンマ（NPD）」の状況における「協力」行動の選択



◇「他の誰かがそれをする・しないに関係なく，自らがそれをすれば，生物学的適応度（期待される子孫の数）を下げるような利他的行動であるが，誰もがそれをするならば，誰もそれをしない場合より全員が適応度をあげるような行動」をある程度ヒトはしているようにみえる．（そして，そのような行動を可能にする遺伝的基礎がヒトにはあると仮定する．）

◇一方で，ゲーム理論は，NPD としてモデル化される状況において「非・協力」を予測先として指し示す．（ここでは，主観的効用が生物学的適応度に一致するとみられる状況を念頭におくことにする．）

（例）・・・

◇目的は，（1）NPD を解消し，（2）この事実を説明する，ことである．

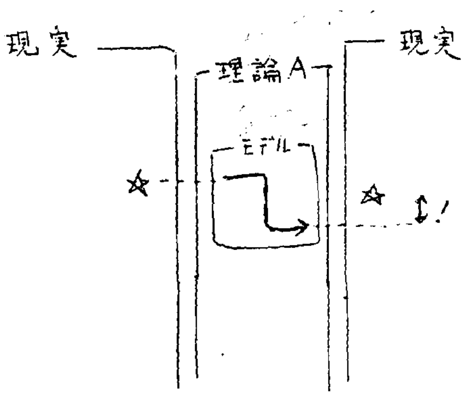
1. 2「ジレンマの解消」その定義あるいは公準．

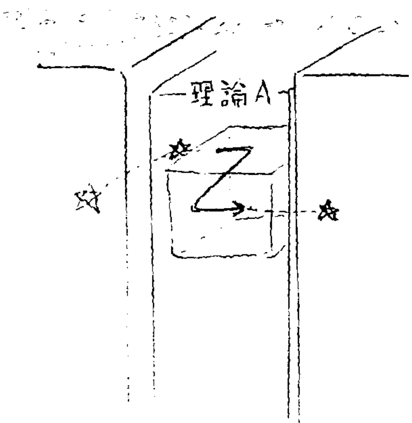
◇「ジレンマ」：「“個人合理性”と“社会的合理性”の間のジレンマ」
「“理論の予測”と“実際の現象（現実）”の間の不一致（パラドクス）」

◇「解消する」：“ある理論に基づくモデルの予測の失敗に対し，モデルの前提をより現実的に変えることによって，すなわち，既存モデルでは省みられずにいた現実の要素を新たにモデルに取り込むことによって，予測を現実に一致させる．

◇上の意味で「ジレンマが解消」されたとき，もとのモデルはその前提の非現実性が改めて確認され，新たに構想される一群のモデルの内の特殊ケースとして逆に位置付けられることになるであろう．それは理論の適用範囲の拡大を意味し理論の発展を支えたことになる．（参考例：２者囚人のジレンマにおける“時間”の導入による解消．）

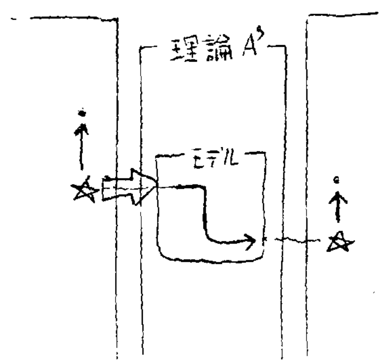
◇ところで「現実」とは多様・個別的なものである．したがって，「ジレンマの解消」は，ジレンマとしてモデル化される広範な“現実”についてなされるのではなく，限定された「ある現実」（ここでは「生物としてのヒトの行動の特殊性」）を対象として検討するのは当然である．

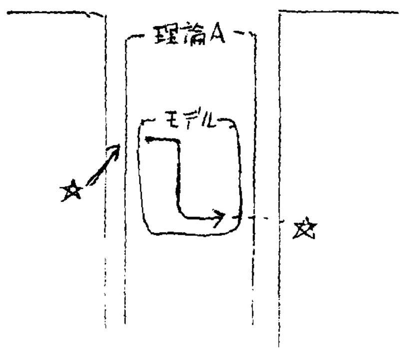




◇それぞれに有意味な場合もあるが，上の「ジレンマの解消」とは区別すべきもの．

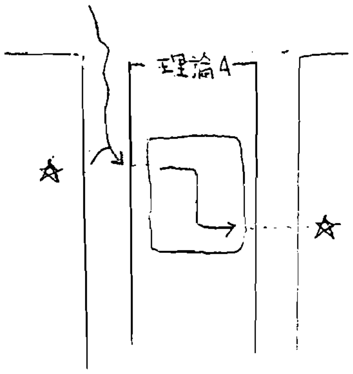
現実にジレンマがあるという認識のもと，その現実の表現，および現実を変えることに主な関心がある（「社会的ジレンマの解決」）．

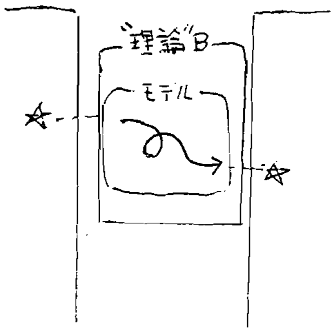




対象である現実を，同じ理論から導出される別の既存モデルでモデル化する（「これは実は別のゲームなのだ」）．

現実に近づけようとするのではなく，“解消”の目的以外に
特別な根拠なくモデルに別の要素を入れる．





新しい“理論”を創る，あるいは理論の根本的な“変革”．
すなわち理論を構成する諸概念自体（諸概念が意味するものではなく）を変えたり，解の概念を変えたりする．

1．3 群淘汰モデル

◇群淘汰モデル：（大浦・他）

牛の放牧のための共有地を持つ村が多数あるとする．・・・
ただし，本当はランダムマッチング．

◇継承点および非・継承点

ホッブス問題の生物学的解釈
実際の現象としての“群”への着目

群の理論上の位置⇒プレイの頻度，非ランダムマッチング（？）
最終的な解の概念が失われることによる非決定，それを埋める形での，既存理論に外在的な新要素の導入，新たな解の概念の導入など．

1. 4 基本的な発想

◇群同士がゲームをプレイ（群間ゲーム）し互いに“淘汰”しあう．

◇群間ゲームの１つの例としての“戦争”への着目．「人間の歴史は戦争の歴史（「協力」の逆）」．戦争によって，「非協力（戦争参加拒否・逃避）」の多い群はより積極的に淘汰されるのではないか．（⇒後述）ただし，以降は，“戦争”に限らず一般的に群間ゲームを論じる．

◇しかし群はゲームをするか？

2．群間ゲーム

2.1 匿名的・無名的プレイヤーの集合

ゲーム $G=(I,\ S,\ \pi)$ が存在するとき，プレイヤーの戦略集合 S_i の直積である戦略プロファイル集合 S の要素となっている，あるプロファイルを，$s=(s_1,\ s_2,\ \cdots,\ s_i,\ \cdots,\ s_N)$ とする．$I=\{1,\ 2,\ \cdots,\ i,\ \cdots,\ N\}$ の１つの部分集合を I' とし，I' に属するプレイヤーの戦略のみから成るプロファイルを s' とする．さらに，あるプロファイル s'' が s' の置換の１つであることを s'' in P(s') で表わすとき，以下が成立するならば，I' を“匿名的プレイヤーの集合”と呼ぶ．

$$\forall i \in I',\ \forall s_i \in S_i,\quad \forall s^{\alpha},\ s^{\beta} \in S,$$
$$s^{\alpha} - s'^{\alpha} = s^{\beta} - s'^{\beta},\ \ s'^{\alpha}_{-i}\ \text{in}\ \mathrm{P}(s'_{-i}),\ \ s'^{\beta}_{-i}\ \text{in}\ \mathrm{P}(s'_{-i})$$

I'に含まれない他の人々の戦略は一定　であれば選ばない(?)

$$\Rightarrow\ \pi_i(s_i, s^{\alpha}_{-i}) = \pi_i(s_i, s^{\beta}_{-i}),$$

または，

$$\forall i \notin I',\ \forall s_i \in S_i,\quad \forall s^{\alpha}_{-i},\ s^{\beta}_{-i} \in S_{-i},$$
$$s^{\alpha}_{-i} - s'^{\alpha}_{-i} = s^{\beta} - s'^{\beta},\ \ \forall s'^{\alpha}\ \text{in}\ \mathrm{P}(s),\ \ s'^{\beta}\ \text{in}\ \mathrm{P}(s)$$
$$\Rightarrow\ \pi_i(s_i, s^{\alpha}_{-i}) = \pi_i(s_i, s^{\beta}_{-i}).$$

また，以下が成立するとき，I' を“無名的プレイヤーの集合”と呼ぶ．

$$\forall i \in I',\ \forall s_i \in S_i,\quad \forall s^{\alpha},\ s^{\beta} \in S,$$
$$s^{\alpha} - s'^{\alpha} = s^{\beta} - s'^{\beta},\ \Sigma s'^{\alpha}_{-i} = \Sigma s'^{\beta}_{-i} \Rightarrow\ \pi_i(s_i, s^{\alpha}_{-i}) = \pi_i(s_i, s^{\beta}_{-i}),$$

または，

$$\forall i \notin I',\ \forall s_i \in S_i,\quad \forall s^{\alpha}_{-i},\ s^{\beta}_{-i} \in S_{-i},$$
$$s^{\alpha}_{-i} - s'^{\alpha}_{-i} = s^{\beta} - s'^{\beta},\ \Sigma s'^{\alpha} = \Sigma s'^{\beta} \Rightarrow\ \pi_i(s_i, s^{\alpha}_{-i}) = \pi_i(s_i, s^{\beta}_{-i}).$$

当然，「ある I' が，無名的プレイヤーの集合 ⇒ 匿名的プレイヤーの集合」である．
⇐

例）I'が匿名的プレイヤー集合ならば…

$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline ① & 1 & 1 & 0.5 & 0.5 & 0 \\ & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 1 \\ ② & 0.5 & 1 & 1 & 0.5 & 0 \\ & 0.5 & 0 & 0 & 0.5 & 1 \\ ③ & 1 & 0.5 & 1 & 0.8 & 0 \\ & 0 & 0.5 & 0 & 0.2 & 1 \end{array}$$

（戦略1の確率，戦略2の確率）

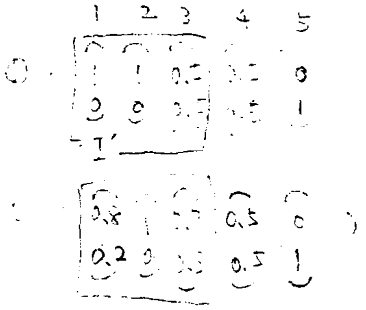
$\binom{1}{0}$ は純粋戦略

$\begin{pmatrix}0.2\\0.5\\0.3\end{pmatrix}$ は混合戦略

プレイヤー2，4，5にとって①，②で利得は同じ．

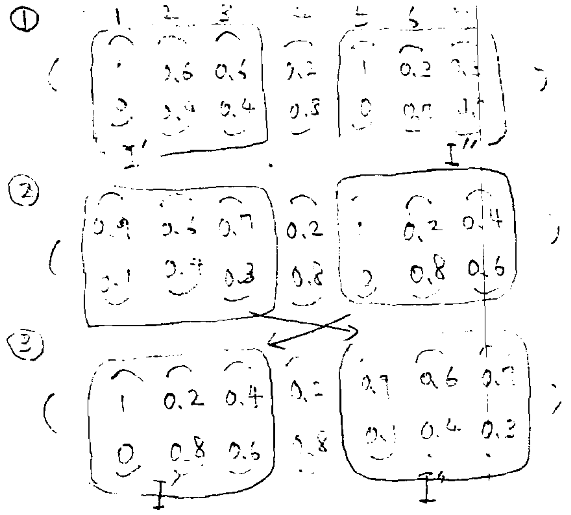
他のゲーム，他のプレイヤーではそうとは限らない．

I′が匿名的プレイヤー集合ならば…



プレイヤー2,4,5の利得は、①,②で同じ。

I′とI″が匿名的プレイヤー集合ならば…



プレイヤー2,4,5の利得は、①,②で同じ。

②,③でプレイヤー4の利得が同じとは限らない。

I′, I″があわせて匿名なプレイヤーであったら③でもプレイヤー4の利得は同じになる。

・匿名的

注 1）匿名的プレイヤー集合に属するプレイヤーが十分に多いとき，i が I' に属するかどうかの場合分けは無視できるとしてモデルを構築する．

自分の選択が何かはいつでも自分の利得にとって重要。ただし自分の手が全体に与える影響は小さい。

・匿名的

注 2）匿名的プレイヤーの集合は共通要素を含まぬようにして複数考えることもできる．

・匿名的

注 3）1つの匿名的プレイヤーの集合がそのゲームのプレイヤー集合と一致するとき，多くの場合に取り上げられる *NPD* ゲームが属するような，全員が"匿名的な"タイプのゲームとなる．

$u(m)$ という形で記述する。

2.2 群とその戦略

ゲーム $G=(I,\ S,\ \pi)$ における $I=\{1,\ 2,\ \cdots,\ i,\ \cdots,\ N\}$ を各集合の要素の数を n（≧2)にして，$N/_n$ 分割し，$I^{(n)}=\{1,\ 2,\ \cdots,\ l,\ \cdots,\ N/_n\}$ とする．$I^{(n)}$ の各要素のそれぞれ全てが無名的プレイヤー集合であり，さらに，各プレイヤー集合を要素として全体が１つの匿名的プレイヤー集合であるならば，$I^{(n)}$ を“群”の集合と呼ぶ．（全体を再び１つの無名的プレイヤー集合とするなら，分割は無意味になることに注意せよ．）

G において，全てのプレイヤー $i\in I$ に対する純粋戦略集合 S_i の要素の数が M であるとする．各 Si 上の確率分布から成る混合戦略（純粋戦略を含む）集合の部分集合 S'_i を，$S'_1=S'_2=\cdot\cdot=S'_i=\ \cdot\cdot=S'_N=\{s'_1,\ \cdot\cdot,\ s'_k,\ \cdot\cdot,\ s'_K\}$ のように要素の数が K となるように取ったとき，各 $s'_i\in\ S'_i$ を成分とするある戦略プロファイルにおいて，$(s'_1,\ \cdot\cdot,\ s'_k,\ \cdot\cdot,\ s'_K)$ のそれぞれの戦略を与えるプレイヤーの数を $q_k=\#\{i\mid s_i=s'_k\}$ とすると，ベクトル $q=(q_1,\ \cdot\cdot,\ q_k,\ \cdot\cdot,\ q_K)$ が得られる．

このとき，$\Sigma\nu_k=1$ となるようなベクトル $\nu^{(n)}{}_l=(\nu_{l1},\ \cdot\cdot,\ \nu_{lk},\ \cdot\cdot,\ \nu_{lK})$ を考え，さらにこれを成分とするベクトルを，$\nu^{(n)}=(\nu^{(n)}{}_1,\ \cdot\cdot,\ \nu^{(n)}{}_l,\ \cdot\cdot,\ \nu^{(n)}{}_{N/n})$ とし，そのうちの互いに異なる成分のみからなるベクトルを，$\nu^{(n)\prime}=(\nu^{(n)\prime}{}_1,\ \cdot\cdot,\ \nu^{(n)\prime}{}_h,\ \cdot\cdot,\ \nu^{(n)\prime}{}_H)$ で表わす．一方，実数ベクトル $p=(p_1,\ \cdot\cdot p_h,\ \cdot\cdot,\ p_H)$ を用い，次式を考える．

$$q_k=\sum_{h=1}^{H}\{p_h\,(n\,\nu_{hk})\}\quad. \tag{1}$$

q_k を成分とするベクトル q の成分の数は K であるから，(1)から K 本の等式が得られる．ところで上式より，$q_k s'_k=\Sigma(p_h\,n\,\nu_{hk})\,s'_k$ であるから，

$$\sum_{k=1}^{K}q_k\ \ s'_k=\sum_{k=1}^{K}\{\sum_{h=1}^{H}(p_h\,n\,\nu_{hk})\,s'_k\}\quad. \tag{2}$$

s'_k は純粋戦略の数 M を成分とするベクトルであるから，ここでも M 本の等式を得る．したがって，p の成分を未知数とし，他を既知としたとき，$K=M=H$ の条件下で，p は一意に存在する（(2)は(1)から直接に導かれたものであることに注意せよ）．このとき，$s^{(n)\prime}{}_h=\nu^{(n)}{}_h\cdot s'$ を“群戦略”と呼び，$\nu^{(n)}{}_h$ を“群戦略における個体戦略のシェア”と呼ぶ．

したがって，同じ条件の下，ゲーム G の戦略プロファイル $s\in S$ において，各群 l に属するプレイヤーの戦略を成分とするベクトルを，$s_l=(s_{l1},\ \cdot\cdot\cdot,\ s_{ln})$ としたとき，その群は，$s^{(n)}{}_l=(1/_n)(\ \Sigma\ s_{lk})$ の群戦略を与えていることになる．その集合を，$S^{(n)}{}_l$ であらわし，$s^{(n)}=(s^{(n)}{}_1,\ \cdot\cdot,\ s^{(n)}{}_l,\ \cdot\cdot,\ s^{(n)}{}_{N/n})$ を群の戦略プロファイルと呼ぶ．すると，その戦略プロファイルの集合は，群の戦略集合の直積 $S^{(n)}=\times_l S^{(n)}{}_l$ となる．

12/11

$z \quad (7 \;,\; 5)$

$N = 12$

$n = 4$

$\left(\begin{matrix}0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.5 & 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.5 & 0.2 & 0.5 & 0.5 & 0.5\\ 0.8 & 0.8 & 0.8 & 0.5 & 0.8 & 0.8 & 0.8 & 0.5 & 0.8 & 0.5 & 0.5 & 0.5\end{matrix}\right) \quad \alpha$

$1.1/4 \quad 1.7/4$

$2.9/4 \quad 2.3/4$

$v \quad (3/4,\ 1/4)\ (3/4,\ 1/4)\ (1/4,\ 3/4)$

$p \quad (\ 2 \quad , \quad 1\ ) \quad \alpha$

$k=1 \quad 7 = 2 \times 4 \times 3/4 + 1 \times 4 \times 1/4$

$k=2 \quad 5 = 2 \times 4 \times 1/4 + 1 \times 4 \times 3/4$

と図からして成り立っている.
左の意味は, P が未知でも
未知数の数と式の数が
同じなので P は求まる

$7 \cdot (0.2, 0.8) = (2 \cdot 4 \cdot 3/4 + 1 \cdot 4 \cdot 1/4)(0.2, 0.8)$

$5 \cdot (0.5, 0.5) = (2 \cdot 4 \cdot 1/4 + 1 \cdot 4 \cdot 3/4)(0.5, 0.5)$

$(1.4,\ 5.6) = (2 \cdot 4 \cdot 3/4 \cdot 0.2 + 1 \cdot 4 \cdot 1/4 \cdot 0.2,\ 2 \cdot 4 \cdot 3/4 \cdot 0.8 + 1 \cdot 4 \cdot 1/4 \cdot 0.8)$

$+)\ (2.5,\ 2.5) = (2 \cdot 4 \cdot 1/4 \cdot 0.5 + 1 \cdot 4 \cdot 3/4 \cdot 0.5,\ 2 \cdot 4 \cdot 1/4 \cdot 0.5 + 1 \cdot 4 \cdot 3/4 \cdot 0.5)$

$(3.9,\ 8.1) = (2(0.6 + 0.5) + 1(0.2 + 1.5),\ 2(2.4 + 0.5) + 1(0.8 + 1.5))$

注 1)群戦略の定義にあたって導入されるこの条件はどれほど“強い”仮定であろうか？このモデルで問題となるのは，基本的には，個体の純粋戦略が２つ（「協力」あるいは「非協力」）のゲームであり，また，「協力」という１つの既存戦略に対し他の１つ（ずつ）の戦略が侵入できるかどうかということであり，また，「協力」という１つの戦略が支配的な群が多数ありうるか，という点である．

2.3 群の利得（適応度）

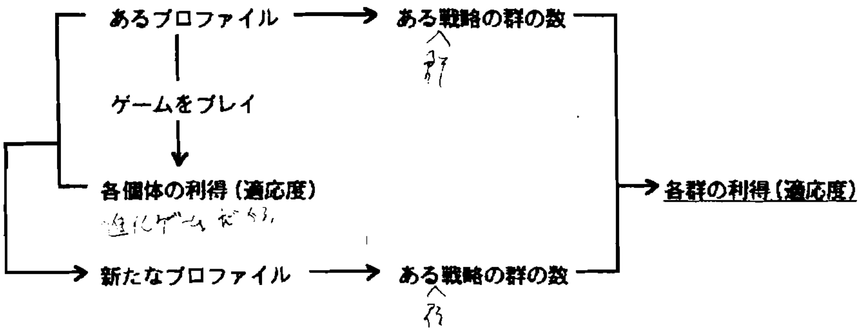
ゲーム $G=(I,\ S,\ \pi)$ （ここでπは結合利得関数）が2.2節で述べた条件を満たすとき，ある適当な実数$p^{\alpha}{}_{h}$を用いると，(2)式より，プロファイルs^{α}について，次が成立する．

$$\sum_{k=1}^{K} q^{\alpha}{}_{k}\ s^{\alpha'}{}_{k} = \sum_{k=1}^{K}\{\sum_{h=1}^{H}(p^{\alpha}{}_{h}\, n\, s^{(n)}{}_{k})\} \quad . \tag{2}$$

一方で，プロファイルs^{β}を，適当な実数$p^{\beta}{}_{l}$を用いて，以下のような性質を持つものとして定義できる．

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{K} q^{\beta}{}_{k}\ s^{\beta'}{}_{k} &= \sum_{k=1}^{K}(\pi_{k}(\cancel{S^{\alpha}}))(q^{\alpha}{}_{k}\, s^{\alpha'}{}_{k}) \\ &= \sum_{k=1}^{K}\{\sum_{h=1}^{H}(p^{\beta}{}_{h}\, n\, s^{(n)}{}_{k})\}\end{aligned}$$

群の利得（適応度）を，$u^{(n)}{}_{l}(s^{(n)}{}_{h}\ ,\ s^{(n)}{}_{-l}) = p^{\beta}{}_{h}/p^{\alpha}{}_{h}$ で定義する．



注1）おそらく，実際の現象の次元で「群」というものを想像した場合には，その語に対応する「多数の個体」がイメージされるであろう．そこで，通常の個体間のゲームのなかに群の概念を導入するとき，その「多数の個体」の間でのゲームが，どのように「群」と関連しつつプレイされるのかを実際の現象として想像することになりがちである.「群の利得」もまた，そうして個体間のゲームがプレイされる過程やその結果から理解されるであろう．すなわち，ある2個体間のゲームがプレイされたとするとき，多数の他のゲームはそれとどう関連してプレイされるのか，あるいは，個体の結集・解散が群を“生成・死滅”させるのか，それとも群は分裂や併合によって“盛衰”するとすべきか，またそのより具体的なパターンはどのようなものか等々について，特定してゆくことになる．しかしながら、このような「事実」の提示は相当な具体性が要求され，その再構成にあたっての論理的可能性の幅は広い一方で，それを裏付ける経験的データは希少であ

ろうから，実際上は極めて難しい作業となる．したがって，結局，いくつかの「事実」を，恣意的に「仮定」してしまう危険が高い．根底にある問題を一般的な形でいえば，モデルにおいて解（すなわち予測先）を導くためには，当然にいくらかの仮定や単純化が必要となるが，モデルのどの部分でそれを行うかということは重要である．抽象度が低いために非現実的になるのは避けたほうがよい．

ここに示したモデルの場合には，「多数の個体」の間で具体的にどのようにゲームがプレイされ，どのように群が形づくられるかということについては全く言及していない．それについてはオープンにしたまま，演繹を進めようとしている．その種の「事実」への想像をしなくても，先に述べた戦略の限定をすれば，群の利得を求めることはできるからである．また，この仮定がもともとの探究課題を損なうこともないとおもわれる．さらに，もし，ここでの「群の利得」の定式化の妥当性をあえて事実に結びつけて考えるならば，（ちょうど時系列データの移動平均をみるときのように）非常に長い期間を平均的にみたときの「事実」を問題にしたときのモデル化ということはできよう．繰り返しになるが，そのような「事実」をモデル化しようとして，「戦略の限定」を仮定した場合には，「群の利得」は，いわば，上のように定式化するより他に仕方がないのである．

2.4 群間ゲーム

$u^{(n)}=(u^{(n)}_1, \cdots u^{(n)}_i, \cdots, u^{(n)}_{N/n})$として，その直積を$U^{(n)}$とすると，ゲームの匿名性により，ある群戦略プロファイル$s^{(n)}$が与えられれば$\pi(S)$は一意に決まるので，関数Φ_π：$S^{(n)} \rightarrow U^{(n)}$を考えることができる．“群間ゲーム”を，$G^{(n)}=(I^{(n)}, S^{(n)}, \Phi_\pi)$で定義する．

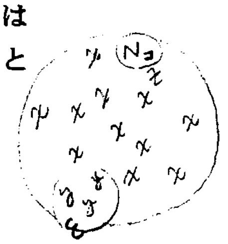
注 1)実際の現象の次元で考察すれば，群は個人の集合体とみなされる．すると，群間ゲームにおける群戦略のプレイは，一般的にいえば，“集合体の挙動”というものについて述べていることになる．ただし，この場合のそれは，散見される「素朴な擬人化」や「アド・ホックに課された“法則”」に従って語られたものとは異なり，個人のレベルでの利得関数に正確に基づくものであることは容易に理解されるであろう．

2.5 群間ゲームにおけるESSとその正当化

２群をプレイヤーとする群間ゲームを個体ベースの通常の進化ゲームとみなすと，ある群戦略xがESS（進化的に安定な戦略）である条件は（周知のとおりに）次のようになる．

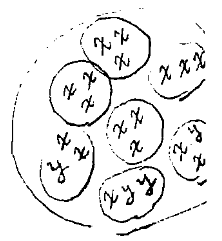
$$\forall y, \quad u^{(n)}(x, x) \geq u^{(n)}(y, x),$$
$$\forall y \neq x, \quad u^{(n)}(x, x) = u^{(n)}(y, x) \Rightarrow u^{(n)}(x, y) > u^{(n)}(y, y).$$

ところで，群間ゲームにおいても，通常の進化ゲームの場合と同様にこの解（ESS）が予測先として妥当といえるであろうか．いいかえれば，どのような具体的事実があるとみたときに，この解の条件を用いることできるだろうか．つまり，群間ゲームにおけるESSはどのように正当化できるのだろうか．進化ゲームにおいて，上に示した条件は次の条件と同値であることが知られている．



$$u^{(n)}[x, \varepsilon y+(1-\varepsilon)x] > u^{(n)}[y, \varepsilon y+(1-\varepsilon)x].$$

通常の進化ゲームにおいては，上のεは，既存戦略xの大集団に侵入した突然変異戦略yをプレイする小集団が占めるシェアである．群間ゲームでは，既存群戦略とは異なる群戦略をプレイする群（以下これを“突然変異群”と呼ぶことにする）のシェアがこれに対応することになる．ところで，群iにおいて突然変異体の占めるシェアをν_iとすれば，次の関係が成り立つ．（Nは種の全個体数）



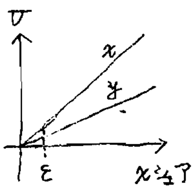
$$\varepsilon N = \Sigma(\nu_i n). \tag{1}$$

個体における突然変異体の個数を，群における突然変異群の数と結びつけようとするならば，変異個体がどれだけの数の群に存在するかがまず問題であるが，実はそれは“突然変異した”群にどれだけづつ変異個体が侵入したかという問題にも関連することは容易に理解できるであろう．実際の現象の次元で推論すれば，群（群れ）は血縁を含む可能性が高いのであるから，突然変異個体の侵入という事実は，多数の群に極めて少数づつの突然変異個体が侵入するのではなく，ごく少数の群が突然変異群になることを意味すると考えることが，一応はできる．したがって，存在する突然変異群の数を p としたとき，$p < \varepsilon N$ は確実である．ただし，群間ゲームにおいては，n の大きさに応じて全体の群（プレイヤー）の数が色々ありうることにも留意する必要がある．そこで，群全体に占める突然変異群のシェアを μ とすれば，

$$\mu = p/(N/n) < (\varepsilon N)/(N/n) = \varepsilon n$$

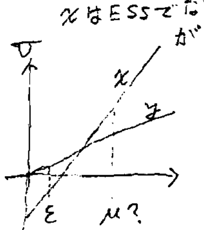
したがって，n が絶対的な意味で小さい数ならば，μ は十分に小さい数となる．そうでなければ，突然変異群はいつも大きなシェアで一挙に侵入してくることになり，その状況では，ESS の条件は安定な均衡の基準として不適切なものとなるであろう．逆にいえば，対象とした事実のモデル化にあたって，1群の個体数 n が小さいという仮定が妥当とみられるときには，通常の進化ゲームと同様に，ESS が群間進化ゲームにおける適切な解として利用できることになる．

x はESS.



n が小さいと考えられないときはどうか．この場合でもおそらく，解の概念を支配戦略均衡にまで強めればそれは利用できるとおもわれるし，それは，n が小さい場合を含んでも，もちろん正当といえる．しかし，支配戦略均衡を用いるならば，当然ながら，個々のモデルを介して対応できる現象の範囲は非常に限定される可能性がある．

x はESSでないが.



一方で，用いるべき解の概念をより弱くすることも考えられる．というのも，（再び実際の現象の次元で推論すれば，）最初に突然変異個体が大集団に侵入し，ある期間において変異個体がその中であるシェアを占めるという事実は，そこに群が存在し，ある頻度で群間ゲームがプレイされるとしたときには，突然変異群における変異個体のシェアについての限定があることを意味するからである．そこで，(1)式を単純化して，いま，突然変異群は p だけ存在し，それら各群における突然変異体のシェアは一定の値 ν^* であり，他の群は既存の個体戦略のみから成ると仮定すれば，$\varepsilon N = pn\nu^*$ より，

$$\nu^* = (\varepsilon / p)(N/n) \quad .$$

したがって，他を所与とすれば，変異個体が“最初に”侵入したときの突然変異群の中の変異個体のシェア ν^* は，n の大きさにより変わる．このことは，n をある大きさに決めた上で群間ゲームの解を求める際には，必ずしも全ての種類の突然変異群の侵入を考慮しなくてもよい，いいかえれば，「任意の」ではなく，「限定された（突然変異群）戦略における“ESS”」を解と考えてよいことを意味する．

$\overbrace{(x\ x\ x\ y\ y)}^{\nu_1}$

$\overbrace{(x\ x\ y\ y\ y)}^{\nu_2}$

$(x\ x\ x\ x\ x)$

以上をふまえた上で，今後は，基本的には，ESSを群間ゲームの解とみなして論を進めることにする．

注 1) ν^*を限定するにあたり，ある群の内において，既存個体に対し変異個体が侵入できるか否かという基準を考えるのは（つまりゲームを“入れ子”の構造として考えることは）誤りである．群間ゲームにおいて，与えられた利得関数は1つであり，群間ゲームと完全に独立した個体間のゲームというものは示されてはいない．これは以前に述べた注とも関連した注意点である．

注 2)現在は，通常の進化ゲームにおけるESSの正当化は，主にレプリケーター・ダイナミクスの仮定に依っているとおもわれる．したがって，群間ゲームにおけるESSもその方向での正当化が本来は望ましい．上で述べられた内容は，暫定的なものしてと理解してもらいたい．

2.6 群間ゲームにおける NPD

あるゲームにおいて以下が成立するならば，“NPD 条件”を満たしているという．

$$\forall i \in I,\ \exists x,\ y \in s_i,\ \forall s \in S,$$
$$\pi_i(x,\ s_{-i}) > \pi_i(y,\ s_{-i}) \ \ \text{and} \ \ \pi_i(x,\ \text{all}\ x_{-i}) < \pi_i(y,\ \text{all}\ y_{-i})\ .$$

あるゲームにおいて，プレイヤー集合 $I' \subset I$ およびその戦略プロファイル s' について，以下が成立するならば，“I' における NPD 条件”を満たしているという．

$$\forall i \in I',\ \exists x,\ y \in s_i,\ \forall s' \in S',\ \forall s \in S,$$
$$\pi_i(x,\ s'_{-i},\ s_{-s'}) > \pi_i(y,\ s'_{-i},\ s_{-s'}) \ \text{and} \ \pi_i(x,\ x',\ s_{-s'}) < \pi_i(y,\ y',\ s_{-s'})\ .$$

ただし，x'，y' はそれぞれ I' に属するプレイヤーの戦略が *all x*，*all y* であることを意味する．明らかに，あるゲームが，“NPD 条件”を満たしているならば，“I' における NPD 条件”を満たしている．

群間ゲームにおいて，それぞれの群の全てが“群における NPD 条件”を満たしているとき，これを“NPD 群間ゲーム”と呼ぶ．群間ゲーム $G^{(n)}$ において，特殊な場合として，$n = 1$，すなわち，$N/n = N$，$I' = I$ としたとき，プレイヤー集合の全体が無名的プレイヤー集合となり，通常扱われる NPD ゲームとなる．

注 1）上のことは，いわゆる NPD としてのモデル化が適当とみられた様々な現象は，2 つに区別しなくてはならないことを意味する．すなわち，それらは，注意してみれば，群間ゲーム内のある群において“I' における NPD”となっていると理解したほうがよい場合と，以前と同様に，通常の NPD，すなわち群間ゲームの特殊ケースであり，それ自体で完結した単一のゲームとしてみたほうがよい場合とがあるのである．後者の場合には通常のいわゆる NPD としてモデルを構築し予測を導けばよいが，前者の場合にはそれは適切ではない．

2.7 様々なNPD群間ゲーム

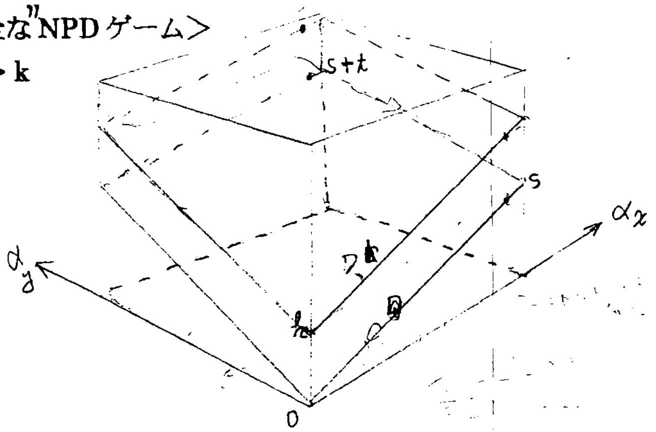
2群 $x(\alpha_x, 1-\alpha_x)$, $y(\alpha_y, 1-\alpha_y)$からなるNPD群間ゲームの，おそらく最も単純な例は，個体戦略を$(\alpha i, 1-\alpha i)$とすれば，実数s，k，tを用いて，以下の利得関数によって表現することができる．（この利得関数自体は“個体”のそれであることに注意せよ．）

$$u_{i\in x}(\alpha_i, \alpha_x, \alpha_y) = s\alpha_x + t\alpha_y + k(1-\alpha_i),$$
$$u_{i\in y}(\alpha_i, \alpha_y, \alpha_x) = s\alpha_y + t\alpha_x + k(1-\alpha_i),$$
$$(\text{ただし}, \quad s > k > 0).$$

群xに属する個体にとって，α_yを与えられたものとすれば，α_xが何であれ，各個体iの最適反応は$\alpha_i = 0$であるが，$u_{i\in x}(0, 0, \alpha_y) = t\alpha_y + k < s + t\alpha_y = u_{i\in x}(1, 1, \alpha_y)$である．群yに属する個体にとっても同様である．

ここで，tをどのような値にするかによって，種々のNPD群間ゲームを考えることができる．

＜“完全な”NPDゲーム＞
$s + t > k$

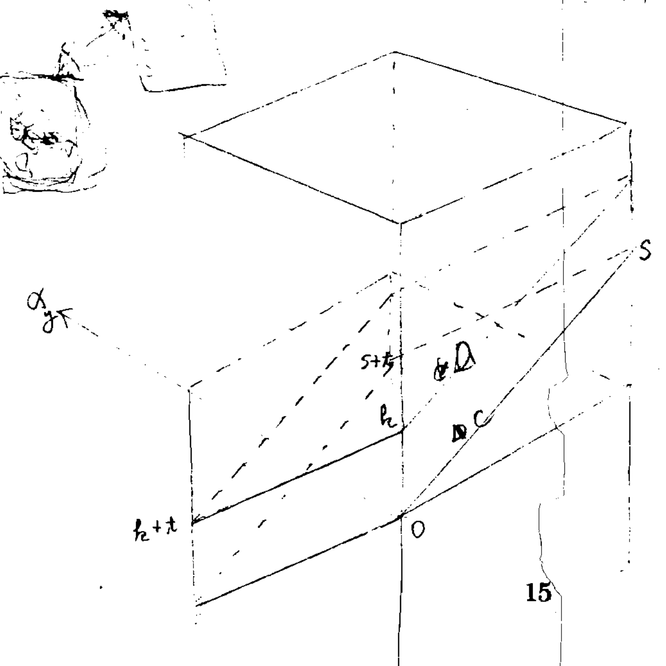


・α_yの側からどう切っても，その断面はNPDの形になっている．
・Cの平面はどこでもDの面より上にある．

s=5, t=2, k=1 とすると，
全員(1,0)なら7，全員(0,1)なら1，
他群(0,1)，自群(1,0)なら5
〃 (1,0)，〃 (0,1)なら2

＜戦争ゲーム（“良心的徴兵拒否”のトリレンマ）＞
$s + t < k$，また，$s > k$より，$s + t > k + t$.

したがって $k+t < s+t < k$



Cを戦争参加
Dを 〃 不参加　とせよ．

	群y参戦	群y和平
群x参戦	s+t / s+t	k+t / s
群x和平	s / k+t	k / k

群yに属す個人の利得
群xに属す個人の利得

「参戦」が“支配戦略”，
ゆえに「参戦」が「社会」合理的，
群xの個人にとって「戦争不参加」が個人合理的，

3．群間 NPD ゲームにおける ESS を求める

3.1 2群間ゲームにおける ESS の条件

まず一般的に，各群の個体数がnの２群による群間ゲームにおけるESSの均衡条件 $u^{(n)}(x, x) \geq u^{(n)}(y, x)$ を，個体レベルの変数だけで表現し直す．

全体の個体数をＮとし，互いに異なる個体戦略を一般的に$(\alpha_k, 1-\alpha_k)$とし，２群 $x(\alpha_x, 1-\alpha_x)$および$y(\alpha_y, 1-\alpha_y)$が存在するとする．このとき，個体戦略の第１番め（個体戦略ベクトルの第１成分）m_1のシェアをrとすると，

この節において記号Nは，2群を成す全個体数を表わす．これは，「2.5」で示した，実際の現象をイメージしたときの種の全個体数を意味するNとは別のものである．

$$r = \sum_{k=1}^{K} q_{m1k}\, s'_{m1k} / N \quad .$$

「群とその戦略」の(2)より，$N(r, 1-r) = \sum_{k=1}^{K}\sum_{h=1}^{H} p_h n\, \nu_{hk}(\alpha_k, 1-\alpha_k)$ だから，

$$\begin{aligned} Nr &= \sum_{h=1}^{2} p_h n \left(\sum_{k=1}^{K} \nu_{hk} \cdot \alpha_k \right) \\ &= n((N/n) - p_y)\alpha_x + n p_y \alpha_y \quad . \end{aligned}$$

（新たにＮを導入したために，ph が１つ消されたことに注意せよ．）したがって，個体数N_1，個体戦略の第１番めのシェアがr_1であるゲームがプレイされ，個体数がN_2に，第個体戦略の１番めのシェアがr_2になり，群yの数がp_{y2}になるとき，以下の関係が成り立つ．

$$N_2 r_2 = n((N_2/n) - p_{y2})\alpha_x + n p_{y2} \alpha_y$$

	x			y		
m1	0.2	0.2	0.5	0.5	0.5	0.2
m2	0.8	0.8	0.5	0.5	0.5	0.8

$\rightarrow (3\times0.2 + 3\times0.5)/6 = 0.35$ （$6 = N$，$0.35 = r$）

$\alpha_x = 0.3$，$1-\alpha_x = 0.7$　　$\alpha_y = 0.4$，$1-\alpha_y = 0.6$

$N_1 r_1$　　p_{y1}　　p_{y1}

$6\times0.35 = 3(\frac{6}{3}-1)\cdot0.3 + 3\cdot1\cdot0.4$

↓

ゲームプレイ

$N_2 r_2$　　p_{y2}　　p_{y2}

したがって，$p_{y2}=N_2(r_2-\alpha_y)/n(\alpha_y-\alpha_x)$ であり，また，$N_1/n=2$ より $n=N_1/2$ であるから，i）$\alpha_x \neq \alpha_y$ のときの個体数を N_2^{xy} で表わし，ii）$\alpha_x=\alpha_y$ のときの個体数を N_2^{xx} で表わせば，

i） $$u^{(n)}(y, x) = p_{y2}/1 = N_2^{xy}(r_2-\alpha_x)/n(\alpha_y-\alpha_x) = 2N_2^{xy}(r_2-\alpha_x)/N_1(\alpha_y-\alpha_x)$$

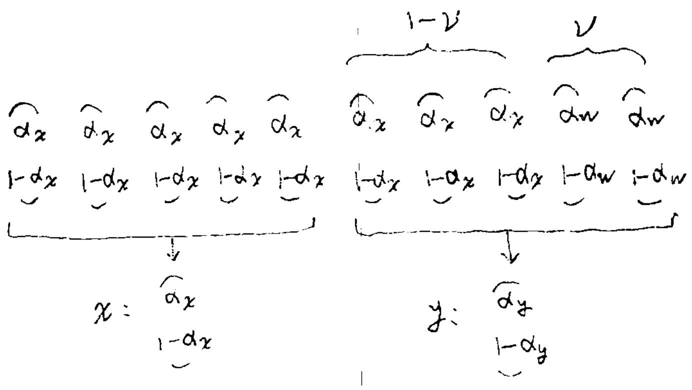
ii） $$u^{(n)}(y, x) = u^{(n)}(x, x) = (N_2^{xx}/n)/(N_1/n) = N_2^{xx}/N_1$$

したがってESSの均衡条件は，

$$1/2 \geq N_2^{xy}(r_2-\alpha_x)/N_2^{xx}(\alpha_y-\alpha_x) .$$

さらに，ここでも一般的に，個体戦略として，$(\alpha_x, 1-\alpha_x)$ と $(\alpha_w, 1-\alpha_w)$ の2種を考え，群戦略として，既存群戦略 $(\alpha_x, 1-\alpha_x)$ と突然変異群戦略 $(\alpha_y, 1-\alpha_y)$ の2種を考える．ここで，$(\alpha_y, 1-\alpha_y)$ の群において，個体戦略 $(\alpha_w, 1-\alpha_w)$ の占める割合を $\nu\,(0<\nu\leqq 1)$ とすると，α_y と α_w の間には以下の関係が成り立つ．

$$\alpha_y=(1-\nu)\alpha_x+\nu\alpha_w . \tag{1}$$



$\alpha_y<\alpha_x$ として，先のESSの均衡条件を変形すると，

$$N_2^{xx}\alpha_y-(N_2^{xx}-2N_2^{xy})\alpha_x-2N_2^{xy}r_2 \leq 0 . \tag{2}$$

3.2 群間NPDゲームにおけるESS

NPD群内ゲーム

ここで，先に示した「~~外部から独立したNPD~~」の利得関数を用いると，

$$
\begin{aligned}
N_2^{xx} &= 2nu_x(\alpha_x,\ \alpha_x,\ \alpha_x)\\
&= 2n\{s\alpha_x + t\alpha_x + k(1-\alpha_x)\}\\
&= 2n\{(s+t)\alpha_x + (1-\alpha_x)k\}\ .
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
N_2^{xy} &= nu_x(\alpha_x,\ \alpha_x,\ \alpha_y) + n(1-\nu)u_y(\alpha_x,\ \alpha_y,\ \alpha_x) + n\nu\, u_y(\alpha_w,\ \alpha_y,\ \alpha_x)\\
&= n[\{s\alpha_x + t\alpha_y + k(1-\alpha_x)\} + (1-\nu)\{s\alpha_y + t\alpha_x + k(1-\alpha_x)\}\\
&\qquad + \nu\{s\alpha_y + t\alpha_x + k(1-\alpha_w)\}]\\
&= n[(s+t)(\alpha_x+\alpha_y) - (2-\nu)k\alpha_x + 2k - \nu k\alpha_w\ .\\
&= n[(s+t)(\alpha_x+\alpha_y) + \{2-(\alpha_x+\alpha_y)\}k]\ . \qquad (\leftarrow (1)\text{より}\alpha_w\text{を変形した．})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
N_2^{xy} r_2 &= nu_x(\alpha_x,\ \alpha_x,\ \alpha_y)\alpha_x + n(1-\nu)u_y(\alpha_x,\ \alpha_y,\ \alpha_x)\alpha_x\\
&\qquad + n\nu\, u_y(\alpha_w,\ \alpha_y,\ \alpha_x)\alpha_w\\
&= n[\{s\alpha_x + t\alpha_y + k(1-\alpha_x)\}\alpha_x + (1-\nu)\{s\alpha_y + t\alpha_x + k(1-\alpha_x)\}\alpha_x\\
&\qquad + \nu\{s\alpha_y + t\alpha_x + k(1-\alpha_w)\}\alpha_w]\ .\\
&= n[\{s\alpha_x + t\alpha_y + k(1-\alpha_x)\}\alpha_x + (1-\nu)k(\alpha_w - \alpha_x)\alpha_x\\
&\qquad + \{s\alpha_y + t\alpha_x + k(1-\alpha_w)\}\alpha_y],\\
&\qquad (\leftarrow \text{最後の}\alpha_w\text{を}(1)\text{により変形した．})
\end{aligned}
$$

再び(1)より，$\alpha_w - \alpha_x = (\alpha_y - \alpha_x)/\nu$ であるから，

$$
\begin{aligned}
(\text{与式}) &= n[\{s\alpha_x + t\alpha_y + k(1-\alpha_x + \alpha_w)\}\alpha_x + \{s\alpha_y + t\alpha_x + k(1-\alpha_x - \alpha_w)\}\alpha_y]\\
&= n[s(\alpha_x+\alpha_y)^2 - 2(s-t)\alpha_x\alpha_y + k(\alpha_x+\alpha_y)(1-\alpha_x) + k\alpha_w(\alpha_x-\alpha_y)].
\end{aligned}
$$

したがって，

$$N_2^{xx} - 2N_2^{xy} = -2n\{(s+t)\alpha_y + (1-\alpha_y)k\}\ .$$

(2)式の左辺をZとおいて，これらをZに代入すると，

$$
\begin{aligned}
Z &= N_2^{xx}\alpha_y - (N_2^{xx} - 2N_2^{xy})\alpha_x - 2N_2^{xy} r_2\\
&= 2n\{(s+t)\alpha_x + (1-\alpha_x)k\}\alpha_y + 2n\{(s+t)\alpha_y + (1-\alpha_y)k\}\alpha_x\\
&\qquad - 2n[s(\alpha_x+\alpha_y)^2 - 2(s-t)\alpha_x\alpha_y + k(\alpha_x+\alpha_y)(1-\alpha_x) + k\alpha_w(\alpha_x-\alpha_y)]\\
&= 2n\{-s(\alpha_x-\alpha_y)^2 + k(\alpha_x-\alpha_y)(\alpha_x-\alpha_w)\}\\
&= -2n(\alpha_x-\alpha_y)\{s(\alpha_x-\alpha_y) - k(\alpha_x-\alpha_w)\}.
\end{aligned}
$$

ここで，$\alpha_y < \alpha_x$を仮定しているから，$Z \leq 0$の条件は，

$$s(\alpha_x - \alpha_y) - k(\alpha_x - \alpha_w) \geq 0 \quad . \tag{3}$$

(1)より，$\alpha_x - \alpha_y = \nu(\alpha_x - \alpha_w)$であるから，

$$(s\nu - k)(\alpha_x - \alpha_w) \geq 0$$

さらに，$\alpha_y < \alpha_x$の仮定より，$\alpha_w < \alpha_x$であるから，

$$\nu \geq k/s \quad . \tag{4}$$

（一方，$\alpha_y > \alpha_x$と仮定した場合には，計算の過程において，不等号の向きは，(2)で逆となり，(3)で上と一致し，(4)で再び逆となるので，結局，$\nu \leq k/s$ ・・(5)となる．）

⑥ tが条件のなかにないことに注意．

(4)，(5)がESSの均衡条件であるが，正確にいえば，それぞれの不等式が成立することは，ある特定の2種の個体戦略を与えたときに，その1つの個体戦略のみからなる既存群戦略は，もう1つの個体戦略がどのようなシェアの群戦略であっても侵入されることはない，ということだけである．したがって，不等式を満たしたときの群戦略が真のESSであるかどうかを知るには，さらに，この2種の個体戦略をありうる全ての個体戦略で入れ替えてみても成立することを確認する必要がある．（これは，もちろん，群戦略は，それを構成する個体戦略の種類とそれらが占めるシェアの2つによって決まることに由来している．ただし幸いにして，ここでの探究課題に応えるにあたって，この事実は大した混乱はもたらさない．）

さて，$0 \leq \nu \leq 1$であるから，$\alpha_y < \alpha_x$のときには，$k/s < 0$，また，$\alpha_y > \alpha_x$のときには，$k/s \geq 1$が成立すれば，任意の個体戦略シェアをもつ群戦略に対し，ESSの均衡条件が成立し，既存群戦略xがESSとなる．ところが，$s > k > 0$であるから，$0 < k/s < 1$であり，ESSは存在しない．個体戦略(1，0)から成る群戦略(1，0)はESSではないが，個体戦略(0，1)からなる群戦略(0，1)もまた，ESSではない．

そこで，先の議論に基づいて，解の概念を弱めることを試みる．$\nu^* \geq k/s$であるような群戦略のみが侵入の可能性があるとしよう．このとき，当然に(4)は常に成立するので，$\alpha_y < \alpha_x$であれば，既存群戦略xは与えられた2種の個体戦略において“ESS”である（これを“弱いESS”と呼ぼう）．いま，x＝(1，0)とすると，いかなる個体戦略の組においても，$\alpha_y < \alpha_x$であるから，$\nu^* \geq k/s$の限定があれば，(1，0)が弱いESSである．逆に，$\nu^* \leq k/s$であるような群戦略のみが侵入の可能性があるとすれば，同様にして，(0，1)が弱いESSとなる．

ところで，先にみたとおり，突然変異群がp存在し，各群の突然変異体のシェアが一定の値ν^*とすれば，$\nu^* = (\varepsilon/p)(N/n)$が成立する．これは，他を所与とすれば，nが小さいほど，すなわち，N/nが大きいほど，ν^*が大きい値をとることを意味している．すなわち，nが小さいほど，したがって，群の数N/nが大きいほど，個体戦略(1，0)のみからなる群戦略(1，0)が“弱いESS”となる可能性が増大する，といえる．これは，逆

に，nを大きくし，その特殊ケースとして$n=N$とし，群の概念を実際上消失させて通常のNPDを構成したときに，(0. 1)がESSとなることとも整合的である．

4．考察

群の概念を導入し，群間ゲームを考えることによって，ジレンマは「十分に」（あるいは「ある程度」）解消され，ヒトの特異な行動を理解するための1つの糸口が得られたと考える．以下は，ここからもたらされる発想を自由に述べておきたいとおもう．

このモデルの導出から最初に描かれる，ヒトがその行動の特異性を獲得するストーリーは，平均的にはある一定のサイズを保っていた“群れ”が，ある時期に何らかの外部要因のために，より少人数のサイズで安定したのものとなり，そこで群間ゲームが繰り返されるうちに，NPDにおける「協力」の選択をする傾向を持ち始めた，というものであろう．このストーリーにおいては， NPDにおける「特異な行動」は，人間が特別に持つとされる他の性質，例えば知性や，それが関係しているとみられる言語の使用や，あるいは自然を加工する技術などとは，全く関連づけられていないことに留意してもらいたい．ヒトとはかけ離れた他の生物でも，上に示した条件が同じであるならば，ヒトにみられるNPDにおける「特異な行動」と同様なものが観察されることになる．

群間ゲームにおけるプレイヤーの“群”は，合理性をもつ主体ではなく，遺伝的にプログラムされた生物でさえもない，ただ人々の認知に支えられた抽象的な存在である．遠い過去の非常に長い期間においては，それは誰もが同一物として安定的に認めることができる，“実体”といえるものであったかもしれないが，“歴史”が始まり進行するにつれ，この対象は確固たるものではなくなってしまった．それは消失・生成の中で絶えず揺らぐものとなり，また，誰からも同一物として認めることも困難なものとなった．しかし，本来の対象は失っても，各個体の遺伝的プログラムは働き，（そこには大きさ等々非常に多様性に幅があるだろうが），各々に自分の属する“群れ”を見い出し，（“社会的アイデンティティ”の実験にみられるような）不合理な帰属意識までをも時にもたらし，また，他の“群れ”との関連に注意を向ける，あるいはそのような“群れ”への献身を称えずにはいられない“衝動”を与える．この“残滓”は，NPDの状況においても，しばしば，利己的で合理的な計算と拮抗する，感情として経験されるような何かを与え，そして素朴な“理論的予測”を裏切る行動をもたらすのであろう．