特殊相対性理論　　　　　高校生でも理解できる内容になっています。

【相対論で扱う量は何か】

自然現象は様々な量を数値で表現する。色や音は波長で表すことができる。

それらの数値には単位がついている。長さの単位 m（メートル）などである。

基本的な単位を組み合わせると新しい量を考えることができる。

自然現象は基本的な単位のついた量と、それらを組み合わせた単位を持った量で構成される。たとえば、「100m を 10s（秒）で走ると速度は 10m/s（メートル毎秒）」などである。

相対論で最初に扱う量は「長さ」と「時間」である。長さは座標点の差、時間は時刻の差なので、「座標」と「時刻」といってもよい。

【相対論とは】

相対論とは、『座標変換』である。

異なる速度で運動する観測者同士の時間軸を含む座標変換の理論である。

観測者が等速度で運動するとき、それを慣性系という。このときの理論を「特殊相対性理論」といい、ここではこの理論について考察する。ちなみに観測者の速度が変化するときの理論を「一般相対性理論」という。

【座標変換はどうなっているか】

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad \ldots ①\qquad t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad \ldots ② \quad \beta = \frac{v}{c}$$

が座標変換の式である。S 系に対し S'系が速度vで運動しており、S 系の位置をx、時刻をt、S'系の位置を x'、時刻をt'とする。cは光速で、3×10^8m/s である。

空間は 3 次元なので、位置y, zもあるが、簡単のためx方向のみ考えることにする。

ところで、S 系は止まっているの？

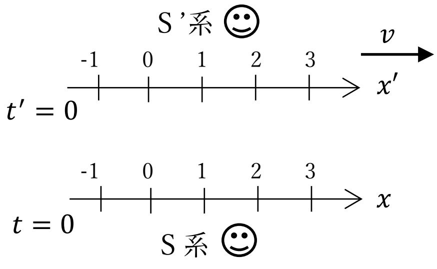
答えは、『わからない』。　我々は完全に静止している系を見つけることはできない。

【常識が成り立たなくなる】

S 系に対し S'系が速度vで運動しているとき、

今までの常識で考えた座標変換の式は、

$x' = x - vt \qquad t' = t$　であった。



ところが、相対論は本来の姿は違うといっている。

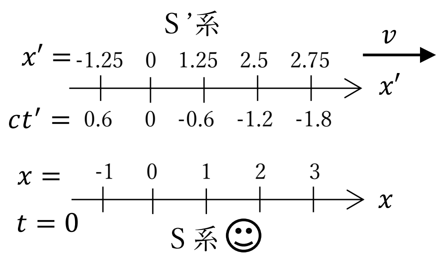
$v = 0.6c$　の場合、

$$x' = \frac{x - 0.6ct}{0.8} \quad \ldots ① \qquad ct' = \frac{ct - 0.6x}{0.8} \quad \ldots ②$$

となる。

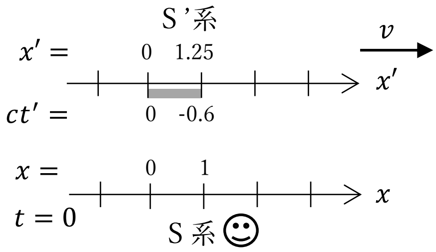
S 系で時刻$t = 0$のとき、$x = \cdots 0,1 \cdots$に対応する S'系のx'座標が変わる。つまり長さが変化する。

さらに奇妙なことに S'系では場所によって時刻が異なる。



これをどう解釈すればよいのか。それは次のようになる。

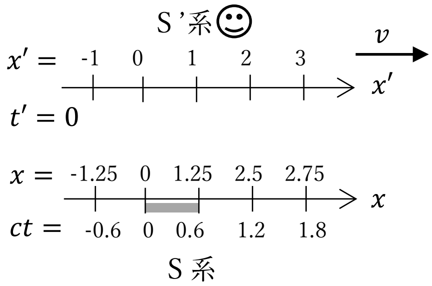
「S’系に長さ 1.25m の棒を置き、それを S 系から見ると長さ 1m の棒に見える。さらに S 系では時刻$t = 0$ に棒を見たつもりだが、S’系では左端$t' = 0$ から右端$t' = -\dfrac{0.6}{c}$まで、場所により異なる時刻の棒の状態を見られたことになる。」



このように、今までの常識的が成り立たなくなる。

さらにもっと奇妙なことがおこる。①、②より、

$$x = \frac{x' + 0.6ct'}{0.8} \quad \ldots①' \qquad t = \frac{ct' + 0.6x'}{0.8} \quad \ldots②'$$ となる。



この式は、S’系に対し S 系が速度$-v$で運動しているときの形をしている。それはいいのだが、この式の意味を考えると、S’系で時刻$t' = 0$のとき、$x' = \cdots 0,1 \cdots$に対応する S 系のx座標と座標点ごとの時刻がさっきと逆に変換されているのだ。

つまりこうなる。

前述の棒を S 系に持ってくると、「あれ？長さ1.25mだったのか」となる。そして、それを S’系から見ると、「おかしいな、長さ1mに見えるぞ」ということになる。

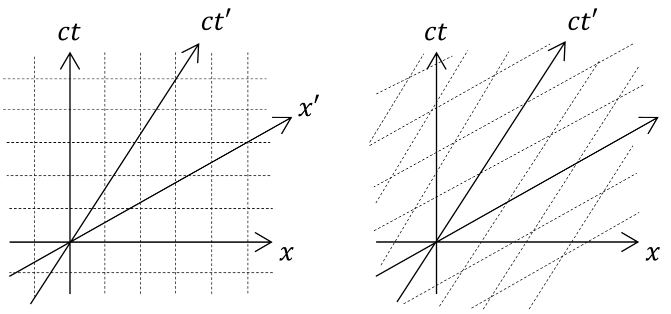
信じられないが、これが正しい現実なのである。

【各系の関係を扱いやすくするグラフ軸の取り方がある】

ミンコフスキーという人が S 系の座標軸と S’系の座標軸を同一面内に描くことを考えた。

図の左が S 系の目盛、右が S’系の目盛である。

これをミンコフスキー図という。



ミンコフスキー図を用いて、前述の棒の右端の見え方を説明しよう。

左図は S’系に置いた棒、右端の座標は、

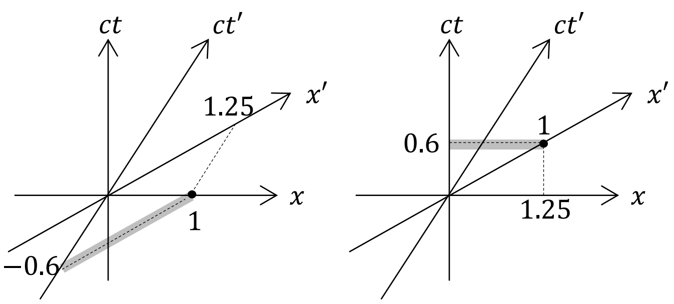
$(ct', x') = (-0.6, 1.25) \quad (ct, x) = (0,1)$

である。

右図は S 系に置いた棒、右端の座標は、

$(ct, x) = (0.6, 1.25) \quad (ct', x') = (0,1)$

である。



【なぜこんな奇妙なことが起こるのか】
光速はどんな速度で観測しても常に　$c = 3 \times 10^8 \mathrm{m/s}$　だからである。
たとえば、右向きに光速cで進む光を、右向きに$\frac{c}{2}$で進みながら見ると光速は$\frac{c}{2}$に、左向きに$\frac{c}{2}$で進みながら見ると光速は$\frac{3c}{2}$に見える、というのが我々の常識であった。
その常識が間違っているというのである。どちらも光速は変わらずcとなる。信じられないかも知れないが、マイケルソンとモーリーが実験で確かめた。
これをもとに自然現象を見直すと、観測者により時間と長さが変わると考えなければならなくなったのである。

相対論を組み立てるときのポイントを整理すると次のようになる。

S 系に対し S'系が速度vで運動しているとき、

① S 系から見ると S'系は速度vで、S'系から見ると S 系は速度$-v$で動いている。
…これは今までの常識で考えて特に問題ないと思う。
② S 系から見ても、S'系から見ても、光速はcである。
…ここが一番重要なところになる。
③ S 系から S'系を眺めると、長さが短く、時間がゆっくりと進むように見える。S'系から S 系を眺めると、同様に長さが短く、時間がゆっくりと進む用に見える。
…ここが一番わかりづらい。自然の対称性からということになるだろうか。 S 系を静止していると考えてはならない。わかっているのは、相対的に動いている系同士であるということである。

座標変換の式を導いてみよう

【結果式から逆算し、どのような条件を使ったか見る】

$x' = \dfrac{x - vt}{\sqrt{1-\beta^2}}$ …① $t' = \dfrac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-\beta^2}}$ …② $\beta = \dfrac{v}{c}$

が結果式で、S 系(x,t)に対し S'系(x',t')が速度vで運動している。

〔$x'=0$の運動は？S 系から見た S'系の原点 O'〕

①に$x'=0$を代入すると、$x = vt$

②に$x = vt$を代入すると$t' = \sqrt{1-\beta^2}t$

〔$x=0$の運動は？S'系から見た S 系の原点 O〕

②に$x=0$を代入すると、$t = \sqrt{1-\beta^2}t'$

①に$x=0$ を代入すると、$x' = -\dfrac{vt}{\sqrt{1-\beta^2}} = -vt'$

ここで、$t' = \sqrt{1-\beta^2}t$ を$t = \sqrt{1-\beta^2}t'$ に代入すると$v=0$となる！なぜか？理由は単純、別の物体（原点 O と原点 O'）の運動を扱った式だからである。

$t_1' = \sqrt{1-\beta^2}t_1$ 、 $t_2' = \sqrt{1-\beta^2}t_2$ ということ。

〔双方の系で光速は変わらない？〕

$x = ct$ より、 $\dfrac{x'}{t'} = \dfrac{\dfrac{ct - vt}{\sqrt{1-\beta^2}}}{\dfrac{t - \frac{v}{c^2}ct}{\sqrt{1-\beta^2}}} = c$

【変換式の求め方】

$x' = ax + bt$ …① $t' = fx + gt$ …②

と仮定する。

〔S 系から見た S'系の原点 O'は速度vで運動する〕

$x'=0$、$x = vt$を代入

①は $(av+b)t = 0$ …ⅰ

②は $t' = (fv+g)t$ …ⅱ

〔S'系から見た S 系の原点 O は速度$-v$で運動する〕

$x=0$、$x' = -vt'$を代入

①は $vt' + bt = 0$ …ⅲ

②は $t' = gt$ …ⅳ

結果

ⅰが任意のtについて成り立つことより、$av + b = 0$

ⅲ、ⅳより、$b + gv = 0$

注意、ⅳをⅱに代入することは許されない。

〔双方の系で光速は同じ〕

$t = t' = 0$ に原点を出た光は$\dfrac{x}{t} = \dfrac{x'}{t'} = c$より、

$\dfrac{x'}{t'} = \dfrac{ax+bt}{fx+gt} = \dfrac{a\frac{x}{t}+b}{f\frac{x}{t}+g} = \dfrac{ac+b}{fc+g} = c$

結果 $ac + b = c(fc+g)$

ここまでの結果を仮定式①、②に代入すると、

$$x' = a(x - vt) \cdots ① \quad t' = a(t - \frac{v}{c^2}x) \cdots ②$$

aが不確定なのはなぜか？ある物体（光でもよい）の運動を見たときの事象の両系での一致の条件が不足している。

〔変換式は系を入れ替えても成り立つ〕

①、②をx,tについて解く

$x' + vt' = \dfrac{(1-\beta^2)x}{\sqrt{1-\beta^2}}$ $\therefore x = \dfrac{x' + vt'}{\sqrt{1-\beta^2}}$

$t = \dfrac{x - \sqrt{1-\beta^2}x'}{v} = \dfrac{x' + vt' - (1-\beta^2)x'}{v\sqrt{1-\beta^2}} = \dfrac{t' + \frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1-\beta^2}}$

S'系に対し S 系が速度$-v$で運動している形になっていることがわかる。

〔仮定式はvを$-v$とし、変数を入れ替えても成り立つ〕

① 、②式のvを$-v$とし、x,tとx',t'を入れ替える。

$x = a(x' + vt')$ $t = a(t' + \dfrac{v}{c^2}x')$

これをx'、t'について解き、①、②と係数比較すると、

$a^2(1 - \dfrac{v^2}{c^2}) = 1$ となり、結果 $a = \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$

したがって最終結果は、

$x = \dfrac{x' - vt'}{\sqrt{1-\beta^2}}$ …① $t = \dfrac{t' - \frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1-\beta^2}}$ …②

参考１　〔変換式は系を入れ替えても成り立つ〕の代わりに

$x^2-(ct)^2={x'}^2-(ct')^2$　を用いても求まる。

$${x'}^2-(ct')^2=a^2(x-vt)^2-c^2a^2(t-\frac{v}{c^2}x)^2=a^2(1-\frac{v^2}{c^2})(x^2-(ct)^2) \qquad \therefore a=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

この式は、同一の事象についてx,t,x',t'の間に成り立つ関係式を示したもので、座標変換からの結論としてみることができる。事象の一致は４次元時空（ミンコフスキー図）の座標点(x,ct)と(x',ct')が一致することである。

参考２　なぜ変換式が１次式になるのか

S 系から観測した質点の運動が等速直線運動ならば、S’系から観測しても等速直線運動でなければならない。

たとえば、$x'=ax+bt+ct^2$と仮定し、$x'=0$、$x=vt$を代入すると、$(av+b)t+cv^2t^2=0$

これが任意のtについて成り立つことより、$av+b=0$、$c=0$　となる。

座標変換とミンコフスキー図を用いて、同時刻の相対性を確かめよう

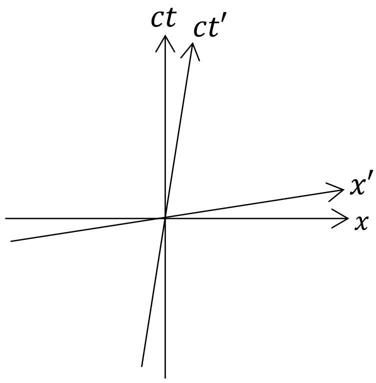
【座標変換】

S系(x,t)に対しS'系(x',t')が速度vで運動（S'系に対しS系が速度$-v$で運動）しているとき、

$$x'=\frac{x-\beta ct}{\sqrt{1-\beta^2}}\ \ \ldots①\qquad ct'=\frac{ct-\beta x}{\sqrt{1-\beta^2}}\ \ \ldots②\qquad \beta=\frac{v}{c}$$

$$x=\frac{x'+\beta ct'}{\sqrt{1-\beta^2}}\ \ \ldots①'\qquad ct=\frac{ct'+\beta x'}{\sqrt{1-\beta^2}}\ \ \ldots②'$$

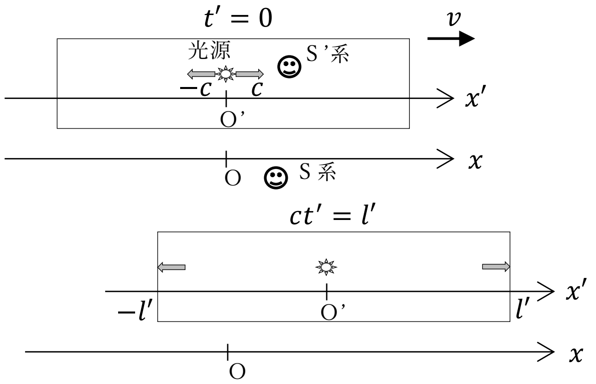
【ミンコフスキー図】

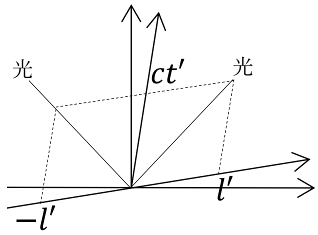


【一直線上を逆向きに進む光が到達する時刻】

時刻$t'=t=0$に，等速度vの列車（S'系）中央$x'=x=0$で発した光が列車の両端$x'=\pm l'$に達するまでを考える。このときの事象は、光が列車の端に到達することである。

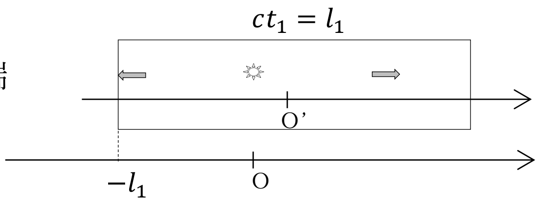
●S'系で観測すると、光は両方向に等速cで進むから、$ct'=l'$の同時刻に両端に達する。

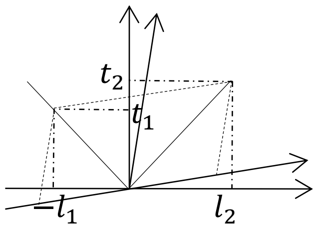




光は、$x=ct$、$x=-ct$ 、
$x'=ct'$、$x'=-ct'$

●これをプラットホーム（S系）で観測すると、光が$-l_1=-ct_1$に列車後端に達するとして、①'より

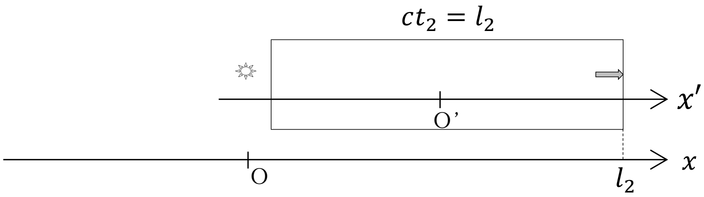




$$-l_1=\frac{-l'+\beta ct'}{\sqrt{1-\beta^2}}\ \Leftarrow$$

$$=-\frac{l'-\beta l'}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$=-\frac{1-\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}l'$$

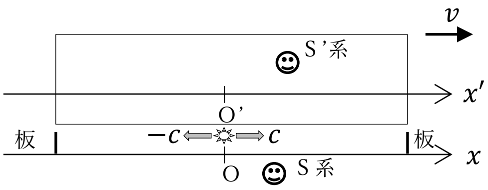


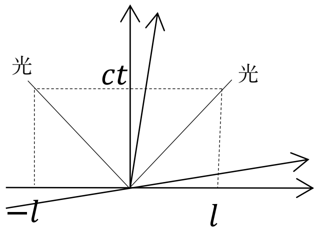
続いて、$l_2=ct_2$に列車前端に達するとして、 $l_2=\dfrac{l'+\beta ct'}{\sqrt{1-\beta^2}}=\dfrac{l'+\beta l'}{\sqrt{1-\beta^2}}=\dfrac{1+\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}l'$

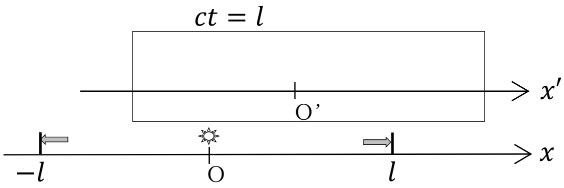
例として、$v=\dfrac{4}{5}c$ とすると、$-l_1=-\dfrac{l'}{3}$ 、 $l_2=3l'$ となり、光が到達する時刻はずれる。

時刻$t=t'=0$に，プラットホーム（S 系）$x=x'=0$で発した光がプラットホームの板$x=\pm l$に達するまでを考える。このときの事象は、光が板に到達することである。

●S 系で観測すると、光は両方向に等速cで進むから、$ct=l$の同時刻に左右の板に達する。

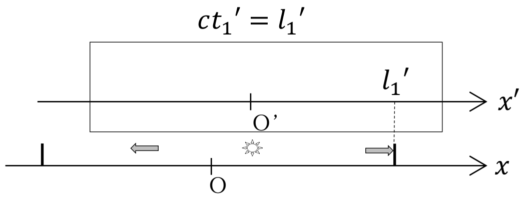


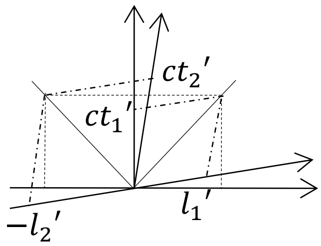


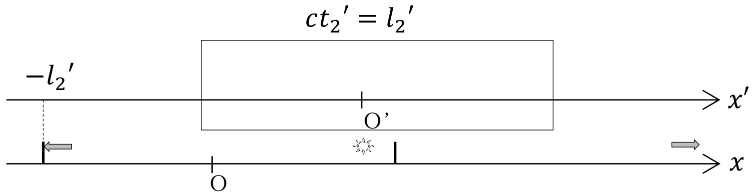


●これを列車（S’系）で観測すると、光が$l_1{}'=ct_1{}'$に右の板に達するとして、①より

$$l_1{}'=\frac{l-\beta ct}{\sqrt{1-\beta^2}}$$
$$=\frac{l-\beta l}{\sqrt{1-\beta^2}}$$
$$=\frac{1-\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}l$$



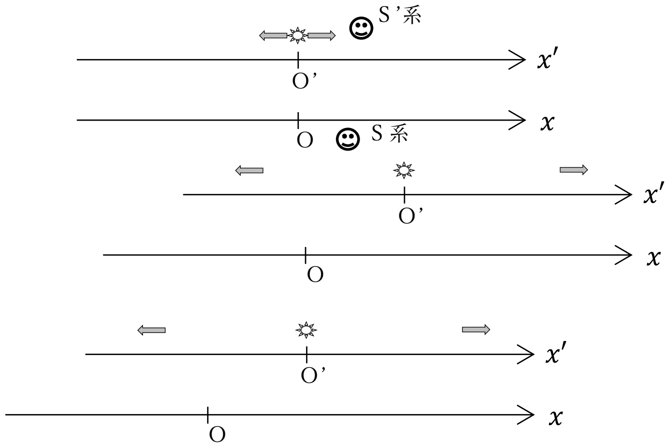




続いて、$l_2=ct_2$に列車前端に達するとして、　$-l_2'=-\frac{l-\beta ct}{\sqrt{1-\beta^2}}=-\frac{l-\beta l}{\sqrt{1-\beta^2}}=-\frac{1+\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}l$

例として、$v=\frac{4}{5}c$　とすると、$l_1'=\frac{l}{3}$ 、$-\ l_2=-3l$　となり、光が到達する時刻はずれる。

参考　光源の位置が列車とともに移動することに違和感がある思われる。それはプラットホームを絶対静止系と考えているからである。相対論は絶対静止系の否定である。相対運動する系の間に成り立つ新たな物理法則なのである。



座標変換とミンコフスキー図を用いて、ローレンツ収縮を確かめよう

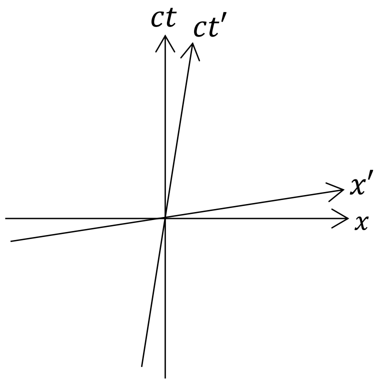
【座標変換】

S 系(x,t)に対し S'系(x',t')が速度vで運動（S'系に対し S 系が速度$-v$で運動）しているとき、

$$x' = \frac{x-\beta ct}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad \dots① \quad ct' = \frac{ct-\beta x}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad \dots② \quad \beta = \frac{v}{c}$$

$$x = \frac{x'+\beta ct'}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad \dots①' \quad ct = \frac{ct'+\beta x'}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad \dots②'$$

【ミンコフスキー図】



【x軸（x'軸）上の棒の長さはどうなる？】

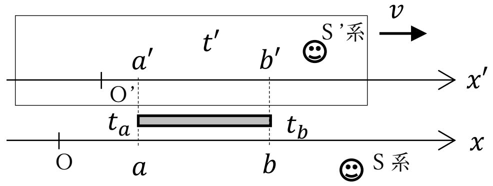
S 系のx軸に置かれた長さlの棒をS'系から見た長さをl'として、ローレンツ収縮　$l' = l\sqrt{1-\beta^2}$ となる。$x = l$、$x' = l'$としたとき、①ではなく①'を用いるのはなぜか。

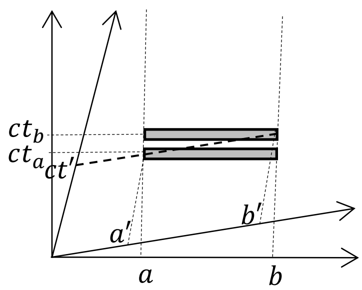
その答えは、時刻！①'で時刻$t' = 0$に棒の両端が見えたとする。これが S 系の事象では棒の左端が見えた時刻と右端が見えた時刻が異なるため、①で$t = 0$とすることはできないのである。

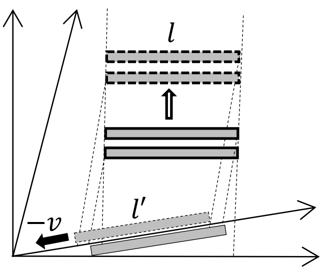
（棒の端で光が反射して目にとどくまでの時間は物差しと時計の配置で測定に影響を与えないようにすることができる）

S 系でx軸上に固定された長さlの棒（左端$x = a$、右端$x = b$）がある。S'系から見た長さl'（左端$x' = a'$、右端$x' = b'$）を求めよ。

S'系で棒の両端を同時刻t'に見たとする。棒の端を見る事象を各系の（位置，時刻）で表すと、S'系で左端（a', t'）、右端（b', t'）、S 系で左端（a, t_a）、右端（b, t_b）となる。







これを①'を用いて解くと、　$b-a=\dfrac{b'+\beta ct'}{\sqrt{1-\beta^2}}-\dfrac{a'+\beta ct'}{\sqrt{1-\beta^2}}$　　$b-a=\dfrac{b'-a'}{\sqrt{1-\beta^2}}$　　$l=\dfrac{l'}{\sqrt{1-\beta^2}}$

∴　$l'=l\sqrt{1-\beta^2}$

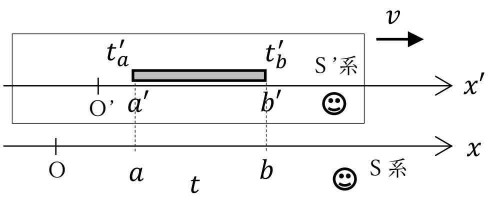
別解として、①、②を用いて、　$ct'=\dfrac{ct_a-\beta a}{\sqrt{1-\beta^2}}=\dfrac{ct_b-\beta b}{\sqrt{1-\beta^2}}$　より、　$c(t_b-t_a)=\beta(b-a)$

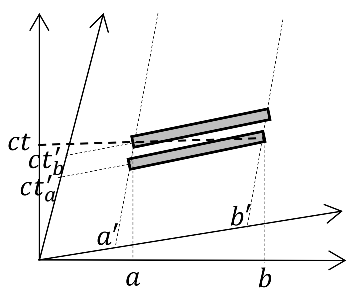
$$b'-a'=\frac{b-\beta ct_b}{\sqrt{1-\beta^2}}-\frac{a-\beta ct_a}{\sqrt{1-\beta^2}}=\frac{(b-a)-\beta c(t_b-t_a)}{\sqrt{1-\beta^2}}=\frac{(1-\beta^2)(b-a)}{\sqrt{1-\beta^2}}=\sqrt{1-\beta^2}(b-a)$$

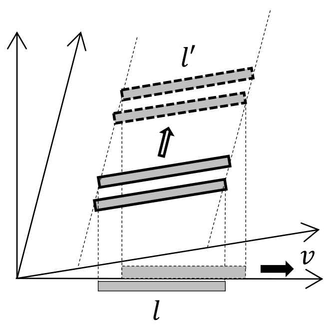
∴　$l'=l\sqrt{1-\beta^2}$

S'系でx'軸上に固定された長さl'の棒（左端$x'=a'$、右端$x'=b'$）がある。S系から見た長さl'（左端$x=a$、右端$x=b$）を求めよ。

S系で棒の両端を同時刻tに見たとする。棒の端を見る事象を各系の（位置，時刻）で表すと、S系で左端（a,t)、右端（b,t)、S'系で左端（a',t_a')、右端（b',t_b'）となる。







これを①を用いて解くと、　$b'-a'=\dfrac{b+\beta ct}{\sqrt{1-\beta^2}}-\dfrac{a+\beta ct}{\sqrt{1-\beta^2}}$　　$b'-a'=\dfrac{b-a}{\sqrt{1-\beta^2}}$　　$l'=\dfrac{l}{\sqrt{1-\beta^2}}$

∴　$l=l'\sqrt{1-\beta^2}$

座標変換式からミンコフスキー図を描いてみよう

【座標変換】

S 系(x,t)に対し S'系(x',t')が速度vで運動（S’系に対し S 系が速度$-v$で運動）しているとき、

$x' = \dfrac{x-\beta ct}{\sqrt{1-\beta^2}}$ …① $ct' = \dfrac{ct-\beta x}{\sqrt{1-\beta^2}}$ …② $\beta = \dfrac{v}{c}$

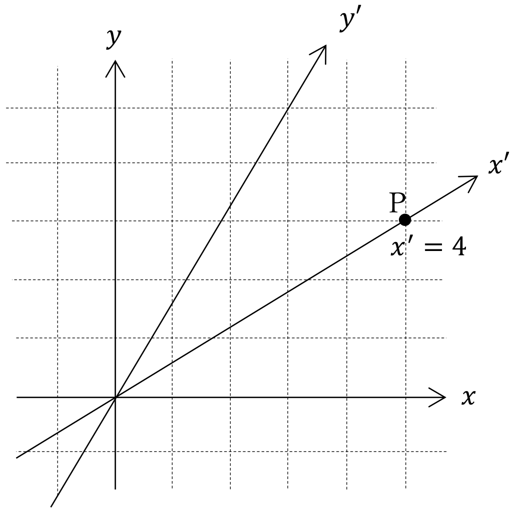
$x = \dfrac{x'+\beta ct'}{\sqrt{1-\beta^2}}$ …①’ $ct = \dfrac{ct'+\beta x'}{\sqrt{1-\beta^2}}$ …②’

【ミンコフスキー図】S 系、S’系の時空座標を同一面内に描く。

ct＝y、ct'＝y' とおく。$\beta = \dfrac{v}{c} = \dfrac{3}{5}$ のときのグラフの軸を考える。座標変換式は、

$x' = \dfrac{5}{4}x - \dfrac{3}{4}y$ …① $y' = \dfrac{5}{4}y - \dfrac{3}{4}x$ …② $x = \dfrac{5}{4}x' + \dfrac{3}{4}y'$ …①’ $y = \dfrac{5}{4}y' + \dfrac{3}{4}x'$ …②’

となる。



x、y軸を直交座標としたとき、①で$x' = 0$ とおくと

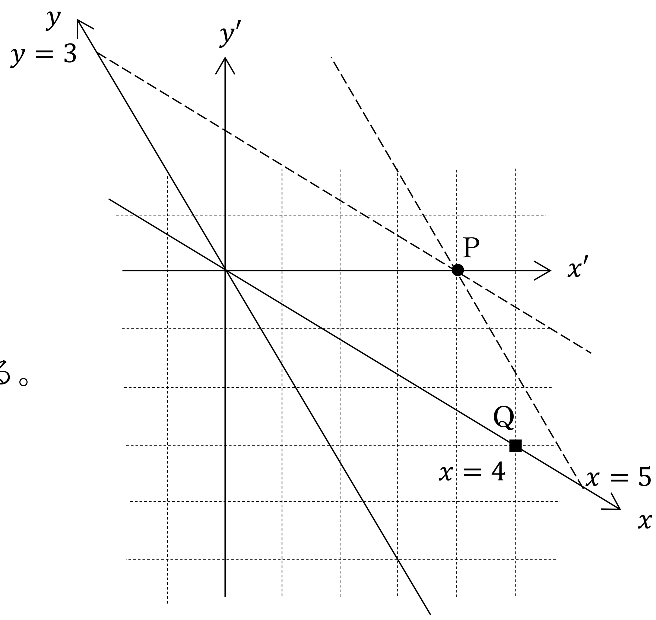
y'軸 $y = \dfrac{5}{3}x$ が求まる。また、②で$y' = 0$ とおくと

x'軸 $y = \dfrac{3}{5}x$ が求まる。

x'、y'軸を直交座標としたときは、①’で$x = 0$ とおくと

y軸 $y' = -\dfrac{5}{3}x'$ が求まる。また、②’で$y = 0$ とおくと

x軸 $y' = -\dfrac{3}{5}x'$ が求まる。



図中の事象 P は、$(x,y) = (5,3)$、$(x',y') = (4,0)$となる。

事象Qは、$(x,y) = (4,0)$、$(x',y') = (5,-3)$となる。

同一面内で S 系、S’系の座標の 1 目盛の大きさが異なる。

また、同一事象について $x^2 - y^2 = x'^2 - y'^2$となる。

速度変換の式を求めてみよう

【座標変換】

S 系(x, t)に対し S'系(x', t')が速度vで運動しているとき、

$$x' = \frac{x - \beta ct}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad \ldots ① \quad ct' = \frac{ct - \beta x}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad \ldots ② \quad \beta = \frac{v}{c}$$

$$x = \frac{x' + \beta ct'}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad \ldots ①' \quad ct = \frac{ct' + \beta x'}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad \ldots ②'$$

【速度変換】

S 系でx軸方向に等速度wで進む物体が、S'系でx'軸方向に速度w'で進むと観測されるとする。

S 系で観測された位置と時刻(a_1, t_1)、(a_2, t_2)が S'系で(a_1', t_1')、(a_2', t_2')となるとして、

① 、②より

$$w' = \frac{a_2' - a_1'}{t_2' - t_1'} = \frac{\dfrac{a_2 - vt_2}{\sqrt{1-\beta^2}} - \dfrac{a_1 - vt_1}{\sqrt{1-\beta^2}}}{\dfrac{t_2 - \frac{v}{c^2}x_2}{\sqrt{1-\beta^2}} - \dfrac{t_1 - \frac{v}{c^2}x_1}{\sqrt{1-\beta^2}}} = \frac{(a_2 - a_1) - v(t_2 - t_1)}{(t_2 - t_1) - \frac{v}{c^2}(x_2 - x_1)} = \frac{\dfrac{a_2 - a_1}{t_2 - t_1} - v}{1 - \dfrac{v}{c^2} \cdot \dfrac{a_2 - a_1}{t_2 - t_1}} = \frac{w - v}{1 - \frac{v}{c^2}w}$$

同様に、①'、②'より、

$$w = \frac{w' + v}{1 + \frac{v}{c^2}w'}$$

参考　合成速度が光速を越えないことを確かめる。

はじめに具体例で確かめよう。

S 系に対し S'系が$v = \dfrac{c}{2}$で動いている。S'系内で$w' = \dfrac{c}{2}$で運動する物体を S 系から見た速度は、

$$w = \frac{\frac{c}{2} + \frac{c}{2}}{1 + \frac{1}{c^2} \cdot \frac{c}{2} \cdot \frac{c}{2}} = \frac{4}{5}c$$　となり、合成速度は光速に達しない。

では、$-c < v < c$、$-c < w' < c$のときwは？

$$c - w = c - \frac{w' + v}{1 + \frac{v}{c^2}w'} = c\frac{1 + \frac{v}{c} \cdot \frac{w'}{c} - \frac{v}{c} - \frac{w'}{c}}{1 + \frac{v}{c} \cdot \frac{w'}{c}} = c\frac{(1 - \frac{v}{c})(1 - \frac{w'}{c})}{1 + \frac{v}{c} \cdot \frac{w'}{c}} > 0$$

よって、合成速度は光速を越えることはない。

質量がエネルギーと等価であることを導いてみよう

物体に力を加えると速度が増加する。(減速や向きが変化する場合もあるが、単純な例で考えよう)

このとき、加えた力積（力×時間）の分、運動量（質量×速度）が増加する。

また、与えた仕事（力×距離）の分、運動エネルギー（$\frac{1}{2}$×質量×速度^2）が増加する。

ところが、速度には上限（光速）があることがわかった。力積や仕事は速度の増加だけで考えてよいのだろうか？　　　　　　『実は質量も増加する』

速度wで運動する物体の質量は $m = \dfrac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$　 $\beta = \dfrac{w}{c}$　$\left(m_0\text{は静止しているときの質量}\right)$となる。

同じ物体の運動でも系により観測される速度が異なるので、それぞれの系で異なる質量になる。

ある物体の運動をS系で観測すると速度w、S'系ではw'とする。このとき、S系で観測される質量は

$m = \dfrac{m_0}{\sqrt{1-\dfrac{w^2}{c^2}}}$　となり、S'系では　$m' = \dfrac{m_0}{\sqrt{1-\dfrac{w'^2}{c^2}}}$　となる。

m_0の値も観測する系により変わるのでは？　　　　　答えは、『変わらない』。

S系で物体が静止すると（速度$w = 0$）質量がm_0になり、S'系で静止すると（$w' = 0$）と同じくm_0になる。このm_0を静止質量をいう。

では、質量の式の意味を考えてみる。

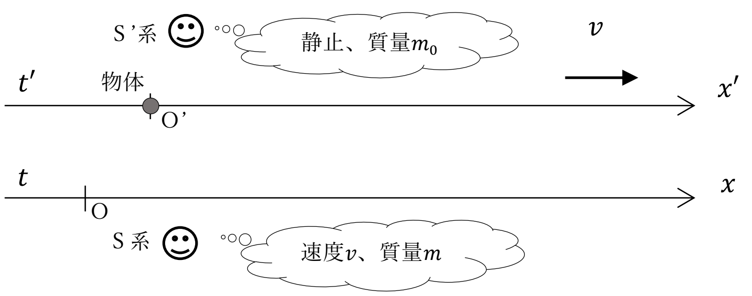
【座標変換】

S系(x, t)に対しS'系(x', t')が速度vで動いているとき、

$x = \dfrac{x' + \beta ct'}{\sqrt{1-\beta^2}}$ …①　$ct = \dfrac{ct' + \beta x'}{\sqrt{1-\beta^2}}$ …②　$\beta = \dfrac{v}{c}$

【運動量を考える】

S'系で静止($x' = 0$、質量m_0)している物体は、S系では速度v(質量m)で運動して見える。



$x=\dfrac{0+\beta ct'}{\sqrt{1-\beta^2}}=\dfrac{vt'}{\sqrt{1-\beta^2}}$ …① $ct=\dfrac{ct'+\beta\times 0}{\sqrt{1-\beta^2}}$ $\therefore t=\dfrac{t'}{\sqrt{1-\beta^2}}$ …② となり、

①より $\dfrac{x}{t'}=\dfrac{v}{\sqrt{1-\beta^2}}$ $\therefore m_0\dfrac{x}{t'}=\dfrac{m_0 v}{\sqrt{1-\beta^2}}=mv$ となる。

『S 系の距離を S'系の時間で割る意味は？』

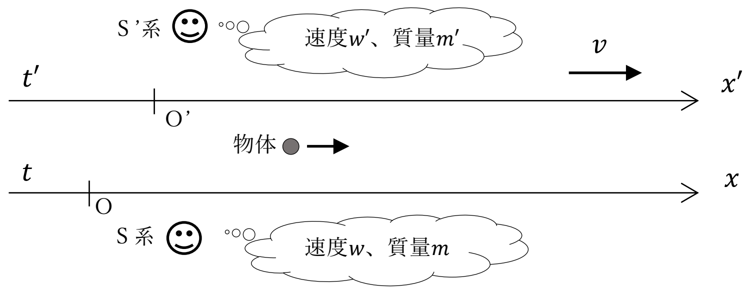
同じ事象を運動量で見たとき、S'系では$m_0\times 0$、S 系ではmvとなるが、これらの値の間に成り立つ事象の一致の関係を考える。

$(ct)^2-x^2=(ct')^2-x'^2$ より $(c\dfrac{t}{t'})^2-(\dfrac{x}{t'})^2=c^2-0^2$

$\therefore$ $(m_0c\dfrac{t}{t'})^2-(m_0\dfrac{x}{t'})^2=(m_0c)^2-(m_0\times 0)^2$ $(mc)^2-(mv)^2=(m_0c)^2-(m_0\times 0)^2$

mcを時間的な運動量、mvを空間的な運動量といい、物体と同じ速さで動く系の時間t'を固有時間という。

S 系に対し S ’系が速度$v=\dfrac{c}{2}$で動いている。 S ’系から見て速度$w'=\dfrac{c}{2}$(質量m')の物体は？



S 系から見た速度は、$w=\dfrac{w'+v}{1+\dfrac{v}{c^2}w'}=\dfrac{\dfrac{c}{2}+\dfrac{c}{2}}{1+\dfrac{1}{c^2}\cdot\dfrac{c}{2}\cdot\dfrac{c}{2}}=\dfrac{4}{5}c$

静止質量をm_0として、

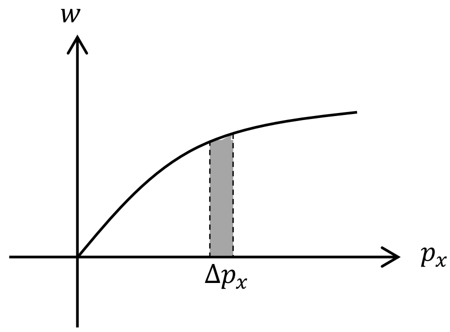
S 系から見た運動量 $p=(mc,mw)=(\dfrac{m_0c}{\sqrt{1-(\dfrac{w}{c})^2}},\dfrac{m_0w}{\sqrt{1-(\dfrac{w}{c})^2}})=(\dfrac{5}{3}m_0c,\dfrac{4}{3}m_0c)$

S ’系から見た運動量 $p'=(m'c,m'w')=(\dfrac{m_0c}{\sqrt{1-(\dfrac{w'}{c})^2}},\dfrac{m_0w'}{\sqrt{1-(\dfrac{w'}{c})^2}})=(\dfrac{2}{\sqrt{3}}m_0c,\dfrac{1}{\sqrt{3}}m_0c)$

ここで、事象の一致 $(\dfrac{5}{3}m_0c)^2-(\dfrac{4}{3}m_0c)^2=(\dfrac{2}{\sqrt{3}}m_0c)^2-(\dfrac{1}{\sqrt{3}}m_0c)^2$ が成り立っている。

次に、

【エネルギーを考える】



ある系で静止質量m_0の物体が、速度wで動いていたとする。

空間的な運動量　$p_x = mw = \dfrac{m_0 w}{\sqrt{1-(\frac{w}{c})^2}}$　より、

$w = \dfrac{p_x c}{\sqrt{p_x^2 + (m_0 c)^2}}$　となる。グラフに描くと右図。

ところで、物体の「エネルギーの増加＝仕事＝力×距離＝質量×加速度×距離」より、

$\Delta E = W = F \times \Delta x = m \times \dfrac{\Delta v}{\Delta t} \times \Delta x$　なのだが、これは質量mが変わらないことを前提としている。

そこで　$\Delta E = \dfrac{\Delta(mv)}{\Delta t} \times \Delta x = \dfrac{\Delta p_x}{\Delta t} \times \Delta x = \dfrac{\Delta x}{\Delta t} \times \Delta p_x = w \Delta p_x$　とする。

これを $dE = w dp_x$ として、積分すると　$E = \displaystyle\int_0^{p_x} w dp_x = \sqrt{(p_x c)^2 + (m_0 c^2)^2} - m_0 c^2$　が求まる。

$m_0 c^2$ を静止しているときのエネルギーとして考え、全エネルギー$E_{total} = E + m_0 c^2$ とすると、

$E_{total} = \sqrt{(p_x c)^2 + (m_0 c^2)^2}$　となる。

前述の　$(mc)^2 - (mv)^2 = (m_0 c)^2 - (m_0 \times 0)^2$　を　$(mc)^2 - p_x^2 = (m_0 c)^2$　と書き換えると、

$(mc^2)^2 = (p_x c)^2 + (m_0 c^2)^2$　となるので、$E_{total} = mc^2$　が結果として導かれる。

小林吉則