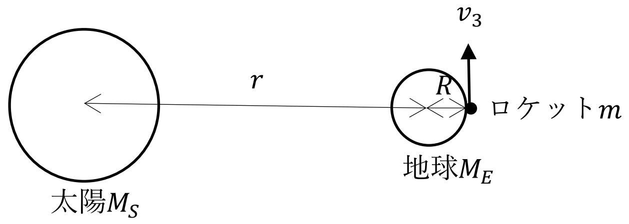
第3宇宙速度



太陽の質量　M_S
地球の質量　M_E
ロケットの質量　m
地球の公転半径　r
地球の半径　R
第３宇宙速度　v_3（地表面に対する相対速度）

【太陽の引力からの脱出速度】
脱出速度をv_sとする。太陽も銀河系の中で動いているが、v_sは太陽に対するロケットの相対速度である。
力学的エネルギー保存の法則より

$$\frac{1}{2}m'v_S^2+\left(-G\frac{mM_S}{r+R}\right)=\frac{1}{2}m'\times 0^2+\left(-G\frac{mM_S}{\infty}\right) \qquad \therefore \frac{1}{2}mv_S^2=G\frac{mM_S}{r} \qquad v_S=\sqrt{\frac{2GM_S}{r}}\cdots①$$

$M_S \gg m$より、換算質量　$m'=\dfrac{mM_S}{m+M_S}\approx m$　、$r\gg R$より　$r+R\approx r$　、$G\dfrac{mM_S}{\infty}\approx 0$

【地球の引力からの脱出速度】
脱出速度をv_Eとする。地球は太陽の回りを公転しているが、v_Eは地球に対するロケットの相対速度である。
力学的エネルギー保存の法則より

$$\frac{1}{2}m''v_E^2+\left(-G\frac{mM_E}{R}\right)=\frac{1}{2}m''\times 0^2+\left(-G\frac{mM_E}{\infty}\right) \qquad \therefore \frac{1}{2}mv_E^2=G\frac{mM_E}{R} \qquad v_E=\sqrt{\frac{2GM_E}{R}}\cdots②$$

$M_E \gg m$より、換算質量　$m''=\dfrac{mM_E}{m+M_E}\approx m$　、$G\dfrac{mM_E}{\infty}\approx 0$

【地球の公転速度】
公転速度をVとする。Vは太陽に対する地球の相対速度である。
地球の運動方程式より

$$M_E'\frac{V^2}{r}=G\frac{M_EM_S}{r^2} \qquad M_S\gg M_E\text{より、換算質量}\quad M_E'=\frac{M_EM_S}{M_E+M_S}\approx M_E \qquad \therefore V=\sqrt{\frac{GM_S}{r}}\cdots③$$

【第３宇宙速度】
太陽と地球の引力からの脱出速度をv_3とする。v_3は地球に対するロケットの相対速度である。

$$\left(\text{脱出に必要な全運動エネルギー}\right)\frac{1}{2}m''v_3^2=\frac{1}{2}m''(v_S-V)^2+\frac{1}{2}m''v_E^2 \quad \therefore v_3=\sqrt{\left(3-2\sqrt{2}\right)\frac{GM_S}{r}+\frac{2GM_E}{R}}$$

v_S-Vは、ロケットをv_Sで公転速度の方向に打ち出したときの地球に対する相対速度である。
$G=6.67\times10^{-11}, M_S=2.0\times10^{30}, M_E=6.0\times10^{24}, r=1.5\times10^{11}, R=6.4\times10^{6}$を代入すると、
$v_3=1.7\times10^4 m/s$

換算質量という考え方を説明もなしに解いた。かなり乱暴な解説だったと思う。
換算質量は、２物体が力を及ぼし合いながらともに動くときに出てくる。
「本当の質量でなく、なぜそんなものが出てくるのか？」
それは、両方動いているとややこしくなるので、一方を止めて考えるからである。
この考え方を『２体問題』という。

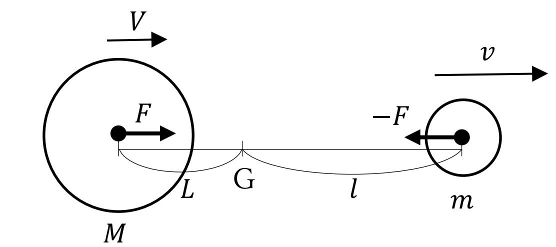
2体問題

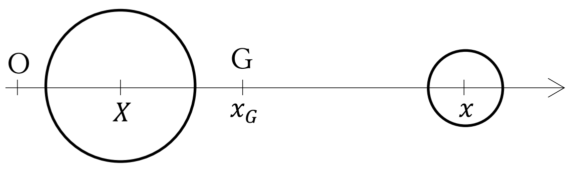
【２体問題とは】

２体問題とは、２物体が力を及ぼし合いながら運動するときの位置、速度、加速度などを求めること。宇宙空間で、天体などの２物体が互いに万有引力を及ぼし合いながら運動する場面を考えるとよい。
これを空間に固定した座標で考えようとすると、両物体が動くので解きにい。そこで、解きやすくするため、相対的な位置、速度、加速度で考える。ところが相対運動では、やっかいなことに実際の質量ではなく､「換算質量」というものが出てくる。イメージしやすいように、次のような場面設定をしよう。
質量Mの地球と質量mのロケットがある。ロケットは地表面から打ち出した後は、噴射等は一切しないものとする。したがって、互いの万有引力だけで運動することになる。
地球も動いているのだが、地球から見たロケットの速度をv_r、加速度をa_rとすると、地球を止めてロケットだけの運動として処理できる。このとき、ロケットの運動方程式は　$m^* a_r = F$　となる。Fは地球がロケットに及ぼす万有引力、m^*は換算質量で　$m^* = \dfrac{mM}{m+M}$　である。

また、ロケットの位置エネルギーをUとすると、力学的エネルギーは　$\dfrac{1}{2}m^* v_r^2 + U$　となる。

【２物体の重心を考える】





上の結果を導くためには、２物体の重心を考える必要がある。いま、一方を質量M、速度V、もう一方を質量m、速度vとし、２物体間のみで力を及ぼしあうことにする。２物体が及ぼしあう力は作用･反作用で、これを「内力」という。(図のF、$-F$)
簡単のため、一直線上での運動を考える。上図の点 G を重心とすると、 $ML = ml$ である。ここで、下図のように座標をとると、$M(x_G - X) = m(x - x_G)$ より、
$(M+m)x_G = MX + mx$　となる。
いま、時間 Δt 後に $(M+m)x'_G = MX' + mx'$ になったとすると、$(M+m)(x'_G - x_G) = M(X' - X) + m(x' - x)$

となり、これを $(M+m)\Delta x_G = M\Delta X + m\Delta x$ とし、Δtで割ると $(M+m)\dfrac{\Delta x_G}{\Delta t} = M\dfrac{\Delta X}{\Delta t} + m\dfrac{\Delta x}{\Delta t}$ となる。

ここで、Δt を十分小さくとると、$(M+m)v_G = MV + mv$ となる。v_Gは重心の速度である。
さらにΔt 後、$(M+m)v'_G = MV' + mv'$ になったとすると、$(M+m)(v'_G - v_G) = M(V' - V) + m(v' - v)$

より、$(M+m)\dfrac{\Delta v_G}{\Delta t} = M\dfrac{\Delta V}{\Delta t} + m\dfrac{\Delta v}{\Delta t}$ となる。$\dfrac{\Delta v_G}{\Delta t}$、$\dfrac{\Delta V}{\Delta t}$、$\dfrac{\Delta v}{\Delta t}$　は加速度であるから、運動方程式より

$(M+m)\dfrac{\Delta v_G}{\Delta t} = F + (-F) = 0$　　$\therefore \dfrac{\Delta v_G}{\Delta t} = 0$ となる。

これらの式は、２物体の運動は、重心に全質量を集めた１つの物体の運動としてみることができることを示している。１つの物体としてまとめると、外から力がはたらいておらず、重心は等速直線運動することが導かれた。

長くなったが、ここまではまだ準備である。

【相対運動として考える】

やっと本題に入る。はじめに、『相対運動では運動方程式がどのようになるか？』を考えよう。

質量Mの物体から見た質量mの物体の位置をx_rとすると、 $x_r = x - X$ である。

$(M+m)x_G = MX + mx$ を用いてXを消去すると $x = x_G + \dfrac{M}{m+M}x_r$ となる。

Δt 後 の変化を考えて、$\dfrac{\Delta x}{\Delta t} = \dfrac{\Delta x_G}{\Delta t} + \dfrac{M}{m+M}\dfrac{\Delta x_r}{\Delta t}$ 、相対速度をv_rとして、 $v = v_G + \dfrac{M}{m+M}v_r$ と書ける。

さらに、Δt 後の速度変化を考えると、$\dfrac{\Delta v}{\Delta t} = \dfrac{\Delta v_G}{\Delta t} + \dfrac{M}{m+M}\dfrac{\Delta v_r}{\Delta t}$ が求まる。

この両辺にmをかけ、$m\dfrac{\Delta v}{\Delta t} = F$、$\dfrac{\Delta v_G}{\Delta t} = 0$、相対加速度$\dfrac{\Delta v_r}{\Delta t} = a_r$ より、$F = \dfrac{mM}{m+M}a_r = m^* a_r$ となり、換算質量が出てきた。

『相対運動で運動方程式を立てるときは、換算質量を用いる』ことがわかった。ただし、注意！Fは何も変更を受けていない。万有引力の場合、$F = G\dfrac{mM}{r^2}$ のmは換算質量を用いてはだめ！

次に、『相対運動ではエネルギーがどのようになるか？』を考えよう。

上と同様に、速度Vを相対速度を用いて表すと、$V = v_G - \dfrac{m}{m+M}v_r$ となる。

したがって、$\dfrac{1}{2}mv^2 + \dfrac{1}{2}MV^2 = \dfrac{1}{2}(m+M)v_G^2 + \dfrac{1}{2}\dfrac{mM}{m+M}v_r^2 = \dfrac{1}{2}(m+M)v_G^2 + \dfrac{1}{2}m^* v_r^2$ が求まる。

重心は等速運動するから、$\dfrac{1}{2}(m+M)v_G^2$ の値は変化しない。よって、２物体が及ぼしあう力が保存力のとき、位置エネルギーをU とすると、$\dfrac{1}{2}m^* v_r^2 + U$ の値は一定に保たれる。

『相対運動で力学的エネルギー保存の法則の式を立てるときは、換算質量を用いる』ただし、ここでもU が万有引力による位置エネルギーのとき、$U = -G\dfrac{mM}{r}$ の式中のmは換算質量を用いてはだめ！