磁場の補足　～ ソレノイド外部に磁場はできないのか？　～

【磁場を求める｢ビオサバールの法則｣とはどのようなものか？】

ビオサバールの法則とは，流れている電流を細かく区切って，その一つ一つがつくる磁場を求める式である。

図１のように，電流i，微小区間dsから角θの方向に距離r離れた点の磁場dHは，$dH=\frac{1}{4\pi}\cdot\frac{ids}{r^2}\sin\theta$　となる。磁場の向きは，idsとrが作る面に垂直で，idsからrに向けて右ネジを回したとき（図の赤線）にネジの進む向きとなる。図１では，紙面垂直に表から裏向きとなる。

右ネジを回す向きは２通りあるが，idsとrの成す角が 180°　より小さい方に回す。したがって，図２の場合，磁場は紙面垂直に裏から表向きとなる。

では，ちょうど 180°　のときは？　　$\sin 180° = 0$より$dH=0$　である！

磁場の強さは，idsのrに垂直な成分の大きさに比例する。

図１

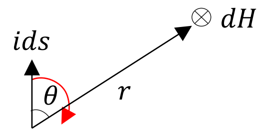
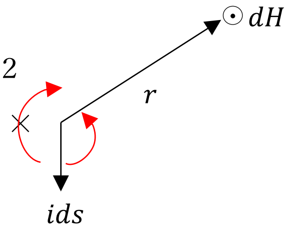


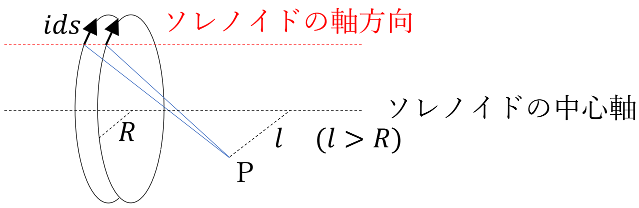
図２



【ソレノイドの外部に磁場は本当にできないの？】

ビオサバールの法則を用いてソレノイド外部の磁場を求めてみよう。

図３



磁場の求め方の方針は２ステップ

〔ステップ１〕

図３のようにソレノイドを十分（無限に）長い円形電流の集まりと考え，円周上の図の赤い点線に沿った各電流idsがソレノイド外部のある点Ｐに作る磁場を求め，それらをたしあわせる。（積分する）

〔ステップ２〕

つづいて，電流idsの位置を円周に沿って少しずつ移動し，上と同じ操作で点Ｐに作る磁場を求める。それらを一周分全てたしあわせる（積分する）と，点Ｐの磁場がわかる。

【実際に外部磁場を求めてみよう。でも作図で考えると難しすぎる…】

そこで数式で処理することにする。

ビオサバールの法則は，$d\vec{H}=\frac{1}{4\pi}\cdot\frac{id\vec{s}\times\vec{r}}{r^3}$　と書き換えることができる。$d\vec{s}\times\vec{r}$　は高校では学習しないが，ベクトルの「外積」である。

〔外積とは〕

２つのベクトル$\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$，$\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$ の外積$\vec{a}\times\vec{b}=(a_2b_3-b_2a_3, a_3b_1-b_3a_1, a_1b_2-b_1a_2)$ である。

図４のとき，

$id\vec{s}\times\vec{r}=idsr(\sin\theta\times 0-0\times 0, 0\times 1-0\times\cos\theta, \cos\theta\times 0-1\times\sin\theta)$

$\quad = idsr\,(0,0,-\sin\theta)$

これを上の式に代入すると，$d\vec{H}=(0,0,-\frac{1}{4\pi}\cdot\frac{ids}{r^2}\sin\theta)$　となる。

z軸が紙面垂直に裏から表向きなので，向きまで含めて磁場が求められたことになる。

図４

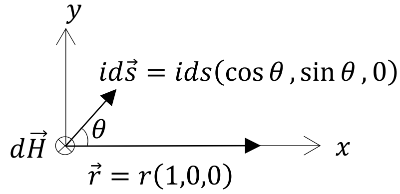


図４で磁場$d\vec{H}$は$\vec{r}$の先端にできるのでは？

確かにその通りであるが，ベクトルを処理するときは平行移動しても結果に影響は出ない。ベクトルの起点を一致させて処理すると楽である。

〔ステップ１〕

図３の軸方向の電流を平行移動して一か所にまとめると図５になる。

$ndyid\vec{s}$ の n はソレノイドの単位長さ（幅）あたりの巻き数である。よって長さ dy に ndy 本の電流が流れている。

これを一つの円形電流として，図５，図６のように座標軸等を設定する。

ビオサバールの法則より，

$$d\vec{H}=\frac{1}{4\pi}\cdot\frac{ndyid\vec{s}\times\vec{r}}{r^3}$$ である。

これをソレノイドの軸（y軸）に沿ってたしあわせる。（積分する）

図５

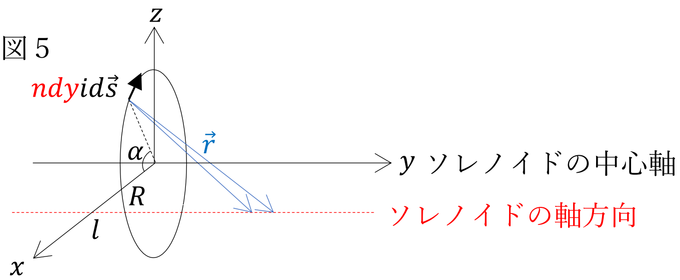
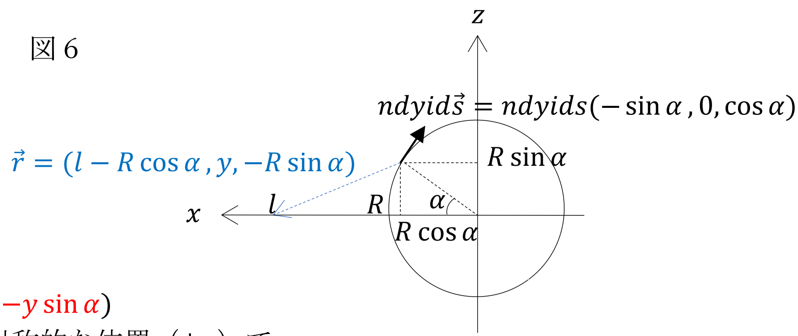


図６



ところで，$d\vec{s}\times\vec{r}=ds(-y\cos\alpha,l\cos\alpha-R,-y\sin\alpha)$

となるのだが、赤字で示したx成分とz成分は対称的な位置（$\pm y$）で大きさが等しく逆向きになっているので，全てたしあわせると 0 となる！

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{4\pi}\cdot\frac{ndyid\vec{s}\times\vec{r}}{r^3}=\frac{ni}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\vec{s}\times\vec{r}}{r^3}dy=\frac{nids}{4\pi}\left(0,\int_{-\infty}^{\infty}\frac{l\cos\alpha-R}{r^3}dy,0\right)$$ である。

したがって，y成分のみをソレノイドの軸（y軸）方向に積分するとよい。y成分を積分してみよう。

$$\frac{nids}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{l\cos\alpha-R}{\{(l-R\cos\alpha)^2+y^2+(-R\sin\alpha)^2\}^{\frac{3}{2}}}dy=A\int_0^{\infty}\frac{1}{\{y^2+B\}^{\frac{3}{2}}}dy=\frac{A}{B}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\{\tan^2\varphi+1\}^{\frac{3}{2}}}\cdot\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi}=\frac{A}{B}$$

ここで，$A=\dfrac{nids(l\cos\alpha-R)}{2\pi}$，$B=(l-R\cos\alpha)^2+(-R\sin\alpha)^2=l^2+R^2-2lR\cos\alpha$，

$y=\sqrt{B}\tan\varphi$ として置換積分した。

〔ステップ２〕

ステップ１の値を円周に沿って（idsが円周上の全位置にあるときについて）たしあわせる。（積分）

$ds=Rd\alpha$ とおけるので，$\dfrac{A}{B}=\dfrac{niRd\alpha(l\cos\alpha-R)}{2\pi(l^2+R^2-2lR\cos\alpha)}$ となり，

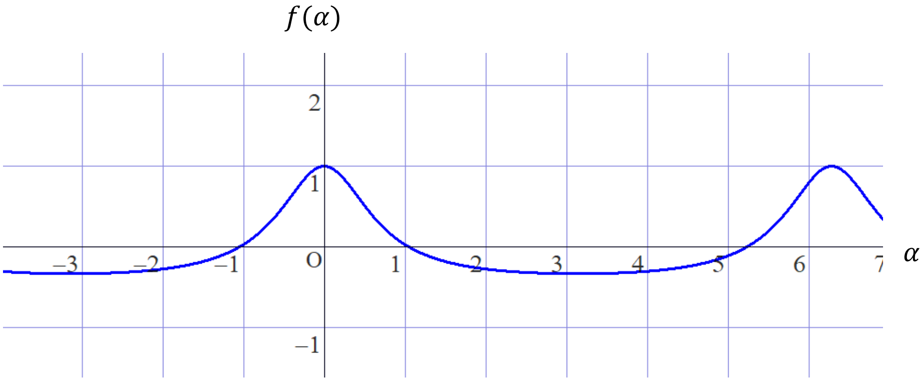
$$H=\frac{niR}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{l\cos\alpha-R}{l^2+R^2-2lR\cos\alpha}d\alpha=\frac{ni}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{a\cos\alpha-1}{a^2-2a\cos\alpha+1}d\alpha=\frac{ni}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{a^2-1}{a^2-2a\cos\alpha+1}-1\right)d\alpha$$

$$=\frac{ni}{4\pi}\left\{\frac{2(a^2-1)}{(a+1)^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{t^2+\left(\frac{a-1}{a+1}\right)^2}dt-\int_{-\pi}^{\pi}d\alpha\right\}=\frac{ni}{4\pi}\left\{2\left[\tan^{-1}\left(\frac{a+1}{a-1}\right)t\right]_{-\infty}^{\infty}-[\alpha]_{-\pi}^{\pi}\right\}=0$$

ここで，$a=\dfrac{l}{R}$ とし，$t=\tan\dfrac{\alpha}{2}$ として置換積分した。積分範囲を　$\alpha=-\pi\sim\pi$　としたのは，関数の不連続を避けるためである。

$$f(\alpha) = \frac{l\cos\alpha - R}{l^2 + R^2 - 2lR\cos\alpha}$$ のグラフの概要を見てみる。

$l = 2, R = 1$



$l = 10, R = 1$