ソレノイド内部の磁場を求めてみました

【電流がつくる磁場について】

高校では，次の３つのパターンについて「公式」として学習している。電流値を I として，

① 直線の導線に電流を流したとき，導線から垂直な方向に距離 r 離れた点にできる磁場 $H=\dfrac{I}{2\pi r}$

② 半径 r の円形の導線に電流を流したとき，円の中心にできる磁場 $H=\dfrac{I}{2r}$

巻き数が N 回のときは， $H=N\dfrac{I}{2r}$ ただし，導線を巻いている幅が半径に比べて狭い場合

③ ソレノイド（円筒に導線をらせん状に密に巻いたもの）に電流を流したとき，ソレノイド内部にできる磁場 $H=nI$ ただし，n は単位長さ（幅）あたりの巻き数

生徒：ソレノイドの磁場は，②の N 回巻きをそのまま使うことはできないんですか。

先生：②の N 回巻きは，巻いているところの幅が狭くて無視できるけど，③は幅が大きくて無視できない場合の式になるんだ。円筒の幅（長さ）を L ，全巻き数を N 回として $n=\dfrac{N}{L}$ となるよ。

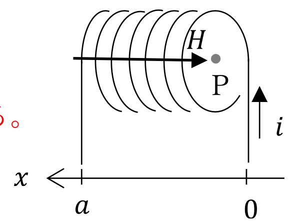
生徒：どうして違いが出るの？

先生：高校では学習していないけど，「ビオ･サバールの法則」というのがもとになっているんだ。「ビオ･サバールの法則」は，流れている電流を細かく区切って，その一つ一つがつくる磁場を与える式なんだ。それを足し合わせる（積分する）といろいろな場合の式が求まるよ。①は無限に長い直線，③は無限に長い円筒として計算して導き出すんだ。

【ビオ･サバールの法則を用いてソレノイド内部の磁場を求める】 ～生徒のレポートの概要～

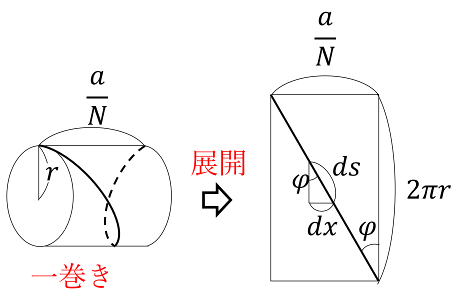
巻き数N，幅a，半径rのソレノイドに電流iを流したとき，内部にできる磁場Hを求める。

右図のように座標軸を取り，ソレノイド右端で円の中点Ｐの磁場を求める。



ソレノイドの一巻きを展開して，微小区間dsを流れる電流がつくる磁場を考える。

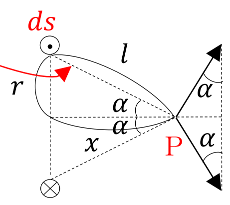
$$\frac{dx}{ds}=\frac{\frac{a}{N}}{\sqrt{4\pi^2r^2+\frac{a^2}{N^2}}}=\cos\varphi \qquad \therefore ds=\sqrt{\frac{4\pi^2r^2N^2}{a^2}+1}\;dx$$



ビオ･サバールの法則より

dsと常に直角

$$dH=\frac{1}{4\pi}\cdot\frac{ids}{l^2}\sin\frac{\pi}{2}=\frac{i}{4\pi(r^2+x^2)}\sqrt{\frac{4\pi^2r^2N^2}{a^2}+1}\;dx$$



$$H=\int_0^a 2\sin\alpha\times\frac{i}{4\pi(r^2+x^2)}\sqrt{\frac{4\pi^2r^2N^2}{a^2}+1}\,dx$$

$$=\frac{i}{2\pi}\sqrt{\frac{4\pi^2r^2N^2}{a^2}+1}\int_0^a\frac{r}{\sqrt{r^2+x^2}}\cdot\frac{1}{r^2+x^2}\,dx$$

$l^2=r^2+x^2$

ここで $x=r\tan t$ とおくと（aが十分大きいとし）

t は $0\to\dfrac{\pi}{2}$ ， $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{r}{\cos^2 t}$

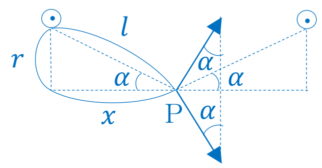
よって　$H=\dfrac{i}{2\pi}\sqrt{\dfrac{4\pi^2r^2N^2}{a^2}+1}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{r}{(r^2(1+\tan^2 t))^{\frac{3}{2}}}\times\dfrac{r}{\cos^2 t}\,dt=\dfrac{i}{2\pi}\sqrt{\dfrac{4\pi^2r^2N^2}{a^2}+1}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos t}{r}\,dt$

$$=\frac{i}{2\pi}\sqrt{\frac{4\pi^2r^2N^2}{a^2}+1}\times\frac{1}{r}=\frac{N}{a}i\sqrt{1+\frac{a^2}{4\pi^2r^2N^2}}=ni\sqrt{1+\frac{1}{4\pi^2r^2n^2}}=ni\sqrt{1+(\frac{1}{2\pi rn})^2}\cong ni$$

密に巻いているとき　一巻きの幅$\dfrac{a}{N}=\dfrac{1}{n}\ll 2\pi r$　$\therefore\ \dfrac{1}{2\pi rn}\ll 1$

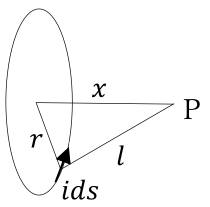
【訂正】

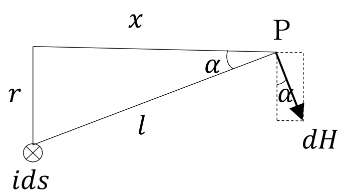
「考え方や数式の処理に間違いはありません」としたのだが，
実は訂正箇所があった。
上のレポートでは点Ｐがソレノイドの右端になっているが，
その場合はレポート内に青字で示した「２」は「１」となり，
磁場の強さは求める値の半分になってしまう。
正しくは，点Ｐを長さ$2a$のソレノイドの中点として，対称性
から右図のように考え「２」をそのまま入れて計算することになる。

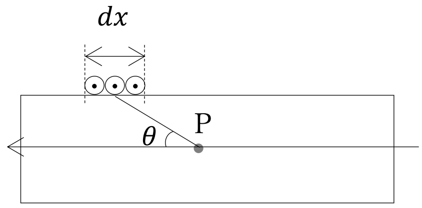


【一般的な求め方は】

円形電流のつくる磁場をもとに考える。ただし，下図の点Ｐにつくる磁場である。







,

一巻きの円形電流が点Ｐにつくる磁場は，$dH=\dfrac{1}{4\pi}\cdot\dfrac{ids}{l^2}\sin\dfrac{\pi}{2}$　　$H=\dfrac{1}{4\pi}\cdot\dfrac{i}{l^2}\displaystyle\int_0^{2\pi r}ds\cdot\sin\alpha=\dfrac{ir^2}{2l^3}$

ソレノイドの単位幅（長さ）あたりの巻き数をnとすると，上図の微小幅dxの巻き数はndxとなる。

ndx個の円形電流が点Ｐにつくる磁場を新たにdHとおくと，$dH=ndx\cdot\dfrac{ir^2}{2l^3}=ndx\cdot\dfrac{ir^2}{2(x^2+r^2)^{\frac{3}{2}}}$

$$H=\frac{nir^2}{2}\int_{-\infty}^{\infty}(x^2+r^2)^{-\frac{3}{2}}dx=\frac{nir^2}{2}\int_0^{2\pi}(\frac{r^2}{\tan^2\theta}+r^2)^{-\frac{3}{2}}\cdot(-\frac{r}{\sin^2\theta})d\theta=ni$$

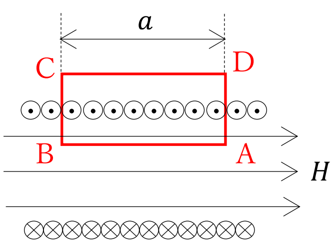
※置換積分を用いてある。座標軸を左向き，磁場の向きが右になっているので少々混乱を招く。

【後日】

生徒：根号の中に余計な式が残るのがいやで，調べてみたら「アンペールの法則」というのがあって，
　　　それを用いて導いてみたんだ。

アンペールの法則によると，N本の導線に同じ向きに電流iが流れているとき，m[Wb]の磁荷をそのまわ

りに一周させるとき必要な仕事はmNi[J]となる。



右図で幅aにN回巻いてあるとする。磁場の強さをHとして，

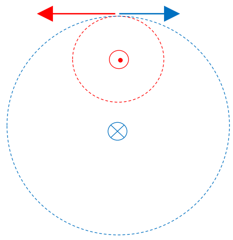
磁荷をＡ→Ｂに移動させるときの仕事はmHa[J]，　Ｂ→Ｃ，

Ｄ→Ａに関しては磁場と垂直な方向の移動なので仕事は 0，Ｃ→Ｄに関してはコイル外の磁場はHに比べて十分小さいから仕事は 0 とみなせる。したがって，$mNi = mHa$　　$\therefore H = \dfrac{N}{a}i = ni$　である。

先生：Very good!

生徒：でも先生，右の図のように考えるとソレノイドの外部の磁場は0 にならないと思うんだ。ソレノイドが細くて，十分離れたところなら 0 でもいいと思うんだけど。

でも逆に十分離れると，ソレノイドをまっすぐな導線のように考えて，直線電流がつくる磁場ができているような気もする。実際どうなっているのかな？



先生：………，実験して調べると面白いかも…