等加速度運動と微分積分

１ 「等加速度運動の位置，速度，加速度」と「微分積分」との関係を考える

● はじめに結論を示す！

「位置」を微分すると「速度」，速度を微分すると「加速度」になる。
「加速度」を積分すると「速度」，速度を積分すると「位置」になる。

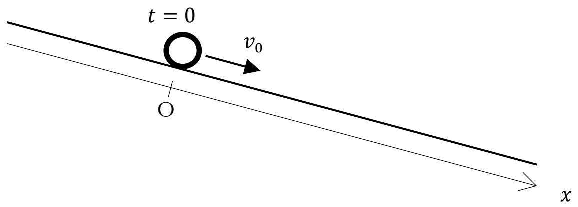
● これを具体的な運動をイメージしながら考えていこう。

斜面をまっすぐに下降する物体の運動

斜面に沿って図のようにx軸をとる。
斜面上に物体を置く。下降してきてx軸の原点を通過したときの時刻を$t=0$，
そのときの速度をv_0とする。
加速度をaとすると等加速度運動の公式は，

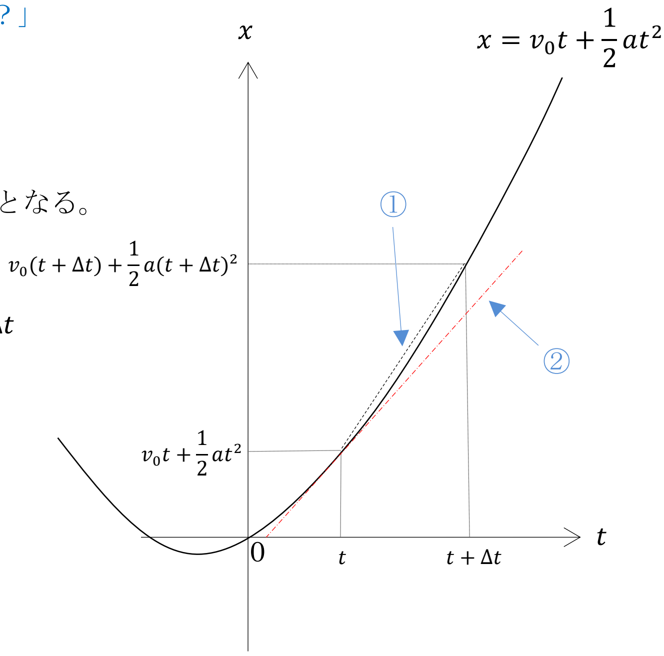
位置　$x=v_0t+\frac{1}{2}at^2$　，速度　$v=v_0+at$

となる。



● 位置の式から速度の式を導く。

【先生と学生Ａ，学生Ｂの会話】
先生　;「速度の求め方を答えなさい」
学生Ａ;「距離÷時間です」
学生Ｂ;「え～，速度が変化しているときもそれでいいの？」
学生Ａ;「いいと思います。ただし，速度が変化しているときは時間を限りなく０に近づけます」
学生Ｂ;「でも，０で割っていいの？無限大になるのでは？」
先生　;「では，実際に計算してみようか」



時刻tにおける位置を$x=v_0t+\frac{1}{2}at^2$とする。

時刻$t+\Delta t$における位置は$x'=v_0(t+\Delta t)+\frac{1}{2}a(t+\Delta t)^2$となる。

速度＝距離÷時間　より，

$$\bar{v}=\frac{x'-x}{(t+\Delta t)-t}=\frac{v_0\Delta t+at\Delta t+\frac{1}{2}a(\Delta t)^2}{\Delta t}=v_0+at+\frac{1}{2}a\Delta t$$

となる。これは実際の速度ではないので $\bar{v}$ と書いて，
「平均の速度」という。
時刻 t の正しい速度を「瞬間の速度」といい，
Δt を限りなく 0 に近づける。これを $\Delta t\to 0$
と書いて「極限」をとるという。

$\Delta t\to 0$ を計算するときは，$\Delta t=0$ とする。したがって，

瞬間の速度は　$v=v_0+at+\frac{1}{2}a\cdot 0=v_0+at$　となる。

０ で割ったのに不思議なことに値が出た。いま代入した一つ前の式を見てほしい。

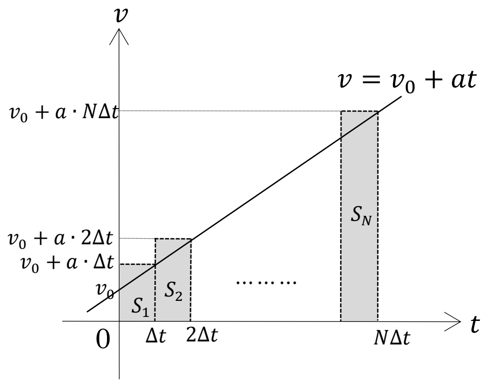
$\frac{v_0\cdot 0+at\cdot 0+\frac{1}{2}a\cdot 0^2}{0}=\frac{0}{0}$　となる。極限をとったとき，$\frac{0}{0}$ は値をもつ場合もあるのである。

ところで，位置と時刻のグラフを見てほしい。直線①は Δt をどんどん小さくすると直線②に近づく。②はグラフの接線である。平均の速度は直線①の傾き、瞬間の速度は直線②の傾きなので，この計算は$x-t$グラフの **接線の傾き** を求める操作ということができる。

数学的表現に慣れておこう。$x'-x=\Delta x$ と書き $v=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{dx}{dt}$，これが **微分** である。

● 速度の式から位置の式を導く。

【先生と学生Ａ，学生Ｂの会話】
先生　;「距離の求め方を答えなさい」
学生Ａ;「速度×時間です」
学生Ｂ;「でも，速度が一定でないときはどうするの？」
学生Ａ;「小さく時間を区切って，その間は一定の速度として計算し，それらをたし合わせればいいと思います」
学生Ｂ;「それって計算できるの？正確な値が出てくるの？」
先生　;「では，実際に計算してみましょう」



時刻 t における速度を $v = v_0 + at$ とする。
ある時刻 t を N 等分し，$\Delta\mathrm{t} = \dfrac{t}{N}$ とする。$(\mathrm{t} = \mathrm{N}\Delta\mathrm{t})$
※　１行目の t と２行目の t は同じ文字を使っているが意味が違う。１行目の t は任意の変数，２行目の t は何か具体的な値を考える。このような使われ方が時々あるので慣れておこう。
時刻 $0{\sim}\Delta t$ は一定速度 $v_1 = v_0 + a \cdot \Delta t$，時刻 $\Delta\mathrm{t}{\sim}2\Delta t$ は一定速度 $v_2 = v_0 + a \cdot 2\Delta t$ …時刻 $(\mathrm{N}-1)\Delta\mathrm{t}{\sim}\mathrm{N}\Delta t$ は一定速度 $v_N = v_0 + a \cdot N\Delta t$ で進んだと考える。
距離＝速度×時間　より，

$$x = v_1\Delta t + v_2\Delta t + \cdots + v_N\Delta t = v_0 \cdot \mathrm{N}\Delta\mathrm{t} + a \cdot (1 + 2 \cdots + N)(\Delta\mathrm{t})^2 = v_0 \cdot \mathrm{N}\Delta\mathrm{t} + a \cdot \frac{(N+1)N}{2}(\Delta\mathrm{t})^2$$ となる。

ここで，Δt を限りなく 0 に近づける。このとき，$\Delta\mathrm{t} = \dfrac{t}{N}$ より N は∞となる。$\Delta t \times N = 0 \times \infty = t$
ゼロと無限大をかけて何らかの値（これを有限な値という）になるという摩訶不思議な式となる。
先生　;「正確な距離を出すには少し式変形のテクニックが必要だよ」

$$x = v_0 \cdot \mathrm{N}\Delta\mathrm{t} + a \cdot \frac{1 + \frac{1}{N}}{2}(\mathrm{N}\Delta\mathrm{t})^2 = v_0\mathrm{t} + a \cdot \frac{1 + \frac{1}{N}}{2}t^2$$ として，$\mathrm{N} \to \infty$ の極限をとると，

$$x = v_0\mathrm{t} + a \cdot \frac{1 + \frac{1}{\infty}}{2}t^2 = v_0\mathrm{t} + a \cdot \frac{1+0}{2}t^2 = v_0\mathrm{t} + \frac{1}{2}at^2$$　となる。

学生Ｂ;「確かにつじつまは合ったけど…なんだかだまされた感じがする」
先生　;「う～ん，ではこういう説明ではどうだろう」
$v_1\Delta t + v_2\Delta t + \cdots + v_N\Delta t$ は図の面積の和 $S_1 + S_2 + \cdots + S_N$ となる。極限 $\Delta t \to 0$ とすると，この面積は台形の面積になる。台形の面積を求めると $\dfrac{\{v_0 + (v_0 + at)\}t}{2} = v_0\mathrm{t} + \dfrac{1}{2}at^2$

距離を求めるのは，$v - t$ グラフの $\boxed{\text{面積}}$ を求める操作ということができる。

この操作を数学的に表現すると　$x = \lim_{N\to\infty}\sum_{k=1}^{N} v_k \dfrac{t}{N} = \lim_{N\to\infty}\sum_{k=1}^{N} v_k\,\Delta t = \int v dt$，これが $\boxed{\text{積分}}$ である。

● 等加速度運動の公式を微分積分で確認する。

位置　$x = v_0 t + \dfrac{1}{2}at^2$　から微分していくと，　　速度　$v = \dfrac{dx}{dt} = v_0 + at$　　　加速度　$\dfrac{dv}{dt} = a$

加速度 a から積分していくと，速度　$v = \int adt = at + C$，C は積分定数である。C の値を求めるには具体的に t と v の値が一組与えられなければならない。とくに $t = 0$ のとき「初期条件」という。
いま $t = 0$ のとき速度が v_0 であったとすると，$v_0 = a \cdot 0 + C$ $\therefore C = v_0$ となり，$v = at + v_0$
次に，位置　$x = \int vdt = \dfrac{1}{2}at^2 + v_0 t + C'$　，C' は積分定数である。「初期条件」$t = 0$ のとき $x = 0$ とすると，$C' = 0$　となり，$x = \dfrac{1}{2}at^2 + v_0 t$