2　衝突やはね返りのときの変化がわかる　（２）運動量保存の法則と反発係数

〔板書〕　テーマ　運動量保存の法則と反発係数

『運動量保存の法則』　衝突の前後で（　全運動量　）の値が変わらない。

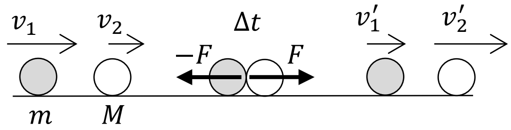
『反発係数』　衝突の前後で（　相対速度　）の比が変わらない。

この比を反発係数といい，衝突する物体の材質によって決まる。

（説明）　運動量保存の法則が成り立つ根拠は？

「運動量の変化＝力積」である。

なめらかな水平面で一直線上での２物体の衝突を想定する。



右図のように各質量，衝突前後のそれぞれの速度，衝突時に及ぼしあう力，接触時間を設定する。

Fと$-F$は作用と反作用で，これを内力という。

運動量の変化＝力積より $mv_1' - mv_1 = -F\Delta t$ ， $Mv_2' - Mv_2 = F\Delta t$ ∴ $mv_1 + Mv_2 = mv_1' + Mv_2'$

反発係数が材質で決まっている根拠は？

「ない！」明確に解明されていない。実験してみるとほぼそうなっているという経験則である。

反発係数 $e = -\dfrac{v_1' - v_2'}{v_1 - v_2}$ と定義する。

〔グループ活動〕

2物体の衝突

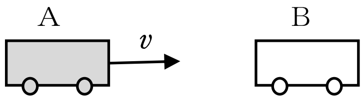
「運動量保存の法則」と「反発係数」の式を立てると，衝突後の速度がわかります。

次の①～③の衝突について，この２つの式を解き，衝突後の２物体の速度がどのようになるか予測してから，実際に衝突実験を行ってみましょう。台車の質量は 500g，おもり１個の質量は 250g です。m＝0.25kg として，文字式で求めてください。

バネ付き棒側で衝突させてください。反発係数はe＝1 となります。速度は測定しませんが，速度の向きと速さが速くなったか遅くなったかを観測してください。

また，衝突の前後の全運動エネルギーを比較してください。

① 質量 $2m$の台車Ａが速さvで，静止している質量２mの台車Ｂに衝突



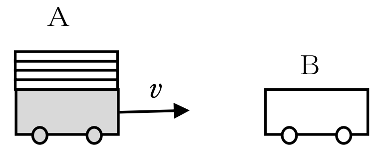
運動量保存の法則　$2mv + 2m \times 0 = 2mv_A + 2mv_B$　　反発係数　$1 = -\dfrac{v_A - v_B}{v - 0}$

$$\therefore\ v_A = 0\ ,v_B = v$$

(衝突前の運動エネルギー) − (衝突後の運動エネルギー)

$$= \left(\frac{1}{2}\cdot 2mv^2 + \frac{1}{2}\cdot 2m\cdot 0^2\right) - \left(\frac{1}{2}\cdot 2m\cdot 0^2 + \frac{1}{2}\cdot 2mv^2\right) = 0$$

② 質量 $6m$ の台車Aが速さ v で，静止している質量 $2m$ の台車Bに衝突



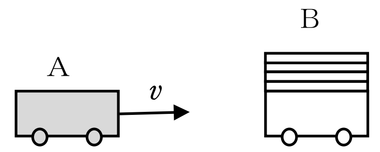
運動量保存の法則　$6mv + 2m \times 0 = 6mv_A + 2mv_B$　　反発係数　$1 = -\dfrac{v_A - v_B}{v - 0}$

$$\therefore\ v_A = \frac{v}{2}\ ,v_B = \frac{3v}{2}$$

(衝突前の運動エネルギー) − (衝突後の運動エネルギー)

$$= \left(\frac{1}{2}\cdot 6mv^2 + \frac{1}{2}\cdot 2m\cdot 0^2\right) - \left(\frac{1}{2}\cdot 6m\left(\frac{v}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\cdot 2m\left(\frac{3v}{2}\right)^2\right) = 0$$

③ 質量 $2m$ の台車Aが速さ v で，静止している質量 $6m$ の台車Bに衝突



運動量保存の法則　$2mv + 6m \times 0 = 2mv_A + 6mv_B$　　反発係数　$1 = -\dfrac{v_A - v_B}{v - 0}$

$$\therefore\ v_A = -\frac{v}{2}\ ,v_B = \frac{v}{2}$$

(衝突前の運動エネルギー) − (衝突後の運動エネルギー)

$$= \left(\frac{1}{2}\cdot 2mv^2 + \frac{1}{2}\cdot 6m\cdot 0^2\right) - \left(\frac{1}{2}\cdot 2m\left(-\frac{v}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\cdot 6m\left(\frac{v}{2}\right)^2\right) = 0$$

衝突後に2物体がくっつく場合

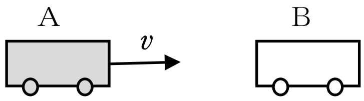
「運動量保存の法則」のみで衝突後の速度がわかります。

次の①～③の衝突について，衝突後の速度がどのようになるか予測してから，実際に衝突実験を行ってみましょう。

マジックテープ側で衝突させてください。反発係数は $e=0$ となりますが，反発係数の式を立てる必要はありません。

また，衝突の前後の全運動エネルギーを比較してください。

① 質量 $2m$ の台車Aが速さ v で，静止している質量 $2\,m$ の台車Bに衝突

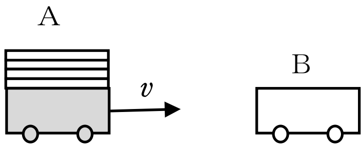


運動量保存の法則　$2mv + 2m \times 0 = 4mv' \quad \therefore v' = \frac{v}{2}$

$\left(衝突前の運動エネルギー\right) - \left(衝突後の運動エネルギー\right)$

$$= \left(\frac{1}{2} \cdot 2mv^2 + \frac{1}{2} \cdot 2m \cdot 0^2\right) - \frac{1}{2} \cdot 4m\left(\frac{v}{2}\right)^2 = \frac{mv^2}{2}$$ ※50%の減少

② 質量 $6m$ の台車Aが速さ v で，静止している質量 $2m$ の台車Bに衝突

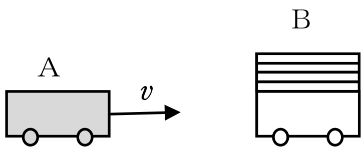


運動量保存の法則　$6mv + 2m \times 0 = 8mv' \quad \therefore v' = \frac{3v}{4}$

$\left(衝突前の運動エネルギー\right) - \left(衝突後の運動エネルギー\right)$

$$= \left(\frac{1}{2} \cdot 6mv^2 + \frac{1}{2} \cdot 2m \cdot 0^2\right) - \frac{1}{2} \cdot 8m\left(\frac{3v}{4}\right)^2 = \frac{3mv^2}{4}$$ ※25%の減少

③ 質量 $2m$ の台車Aが速さ v で，静止している質量 $6m$ の台車Bに衝突



運動量保存の法則　$2mv + 6m \times 0 = 8mv' \quad \therefore v' = \frac{v}{4}$

$\left(衝突前の運動エネルギー\right) - \left(衝突後の運動エネルギー\right)$

$$= \left(\frac{1}{2} \cdot 2mv^2 + \frac{1}{2} \cdot 6m \cdot 0^2\right) - \frac{1}{2} \cdot 8m\left(\frac{v}{4}\right)^2 = \frac{3mv^2}{4}$$ ※75%の減少

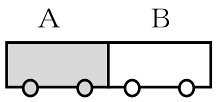
2物体が分裂する場合

「運動量保存の法則」のみで衝突後の「速度の比」がわかります。　**個々の速度はわかりません！**

次の①～③の分裂について，分裂後の 2 物体の速度の比がどのようになるか予測してから，実際に実験を行ってみましょう。

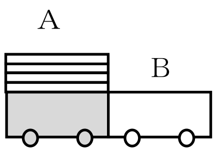
バネ付き棒側で台車同士を押しつけて、同時に手を放してください。

① 質量 $2m$ の台車Aと質量 $2m$ の台車B



運動量保存の法則　$2m\times 0+2m\times 0=2mv_A+2mv_B$　　$\therefore \dfrac{v_B}{v_A}=-1$

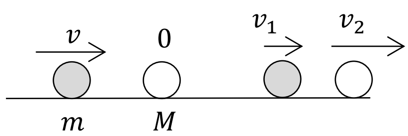
② 質量 $6m$ の台車Aと質量 $2m$ の台車B



運動量保存の法則　$6m\times 0+2m\times 0=6mv_A+2mv_B$　　$\therefore \dfrac{v_B}{v_A}=-3$

〔発問〕反発係数の範囲はどのようになっていると考えられるか。全運動エネルギーの変化をもとに説明せよ。また，分裂のとき反発係数が定義できないのはなぜか。

〔板書〕なめらかで水平な面上で，静止している質量 M の物体に質量 m の物体が速度 v で衝突した後，個々の速度が図のように v_1，v_2 となった。反発係数を e として，



$mv+M\times 0=mv_1+Mv_2$　，$e=-\dfrac{v_1-v_2}{v-0}$　$\therefore v_1=\dfrac{(m-eM)v}{m+M}$　，$v_2=\dfrac{(1+e)mv}{m+M}$

$$\frac{1}{2}mv_1^2+\frac{1}{2}mv_2^2=\frac{m+e^2M}{m+M}\cdot\frac{1}{2}mv^2$$

衝突後 v_1 が v_2 より大きくなることはない$(v_1<v_2)$から，$e=-\dfrac{v_1-v_2}{v-0}$ より $e\geq 0$

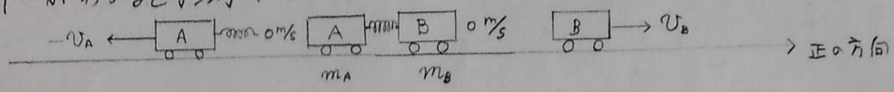
外部からエネルギーが与えられることがなければ $\dfrac{m+e^2M}{m+M}\cdot\dfrac{1}{2}mv^2\leq\dfrac{1}{2}mv^2$ $\therefore e\leq 1$

したがって，$0\leq e\leq 1$ となる。$e=1$ を「完全弾性衝突」，$0\leq e<1$ を「非弾性衝突」という。分裂のとき反発係数が定義できないのは，反発係数の式の分母が 0 となるためである。衝突時（分裂を含む）に外部からエネルギーが与えられるような場合，反発係数は定義できない。たとえば，分裂でなくても衝突時に間にある火薬が爆発するような仕掛けがあったとすると，運動量保存の法則は成り立つが，反発係数は定義できない。

逆に衝突後運動エネルギーが減少している場合は，運動エネルギーの一部が熱エネルギー等に変わったためである。衝突現象は，「運動量保存」と「エネルギー（熱等を含む）保存」を用いると，反発係数を用いずに解くこともできる。

分裂した後の速さの予測は？

● エネルギーがわかると予測できます。



運動量保存の法則　$m_A\times 0 + m_B\times 0 = m_A(-v_A) + m_B v_B$　…①

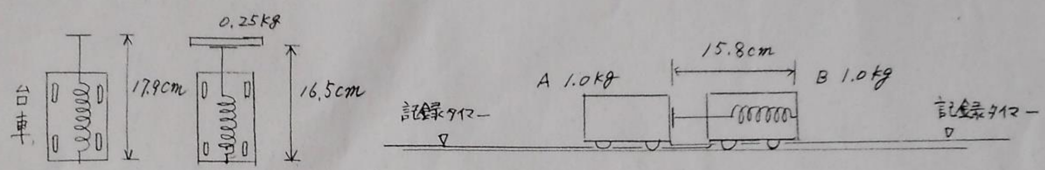
エネルギー保存の法則　$E(\text{分裂前のエネルギー}) = \frac{1}{2}m_A v_A^2 + \frac{1}{2}m_B v_B^2$　…②

〈例〉 分裂前 ばね定数kのばねが自然長からx縮んで間にあり，台車の質量が等しいとき。

① $0 = m(-v_A) + m v_B$　② $\frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}mv_A^2 + \frac{1}{2}mv_B^2$

$\therefore\ v_A = v_B = \sqrt{\frac{k}{2m}}\cdot x$

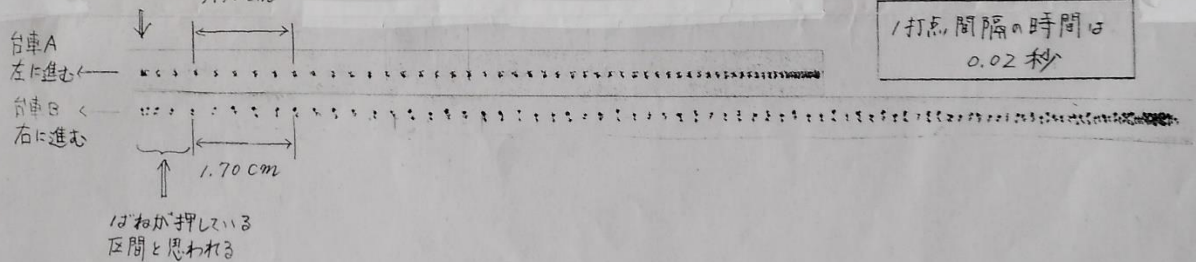
〈実験〉



$x = 17.9 - 16.5 = 1.4\ \text{cm} = 1.4\times 10^{-2}\ \text{m}$

$F = kx$ より　$k = \frac{0.25\times 9.8}{1.4\times 10^{-2}} = 1.75\times 10^{2}\ \text{N/m}$

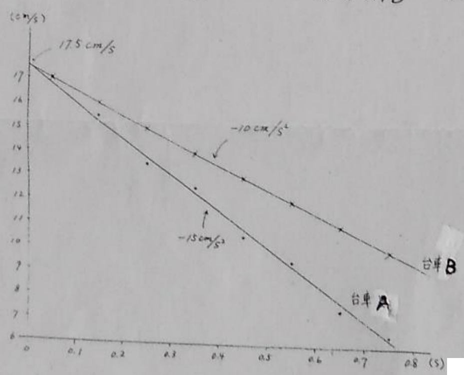
$E = \frac{1}{2}kx^2$
$= \frac{1}{2}\times 1.75\times 10^2\times\{(17.9-15.8)\times 10^{-2}\}^2$
$= 3.85\times 10^{-2}\ \text{J}$



1打点間隔の時間は 0.02秒

（結果） $v_A = v_B = \frac{1.70\times 10^{-2}}{0.1} = 0.170\ \text{m/s}$　$\frac{1}{2}m_A v_A^2 + \frac{1}{2}m_B v_B^2 = 1.0\times 0.170^2 = 2.89\times 10^{-2}\ \text{J}$

（考察） $3.85\times 10^{-2} - 2.89\times 10^{-2} = 0.96\times 10^{-2} = 9.6\times 10^{-3}\ \text{J}$ のエネルギーはどこに？



打点を見ると，台車は減速している。記録テープと記録タイマー，台車と机との摩擦力によると考えられる。左図のように，v-tグラフを描くとばねから離れた直後，台車A，Bの速さはともに 0.175 m/s と推測できる。また，台車A，Bにはたらく抵抗力は，それぞれ

B: $F_B = m_B a_B = 1.0\times 0.10 = 0.10\ \text{N}$

A: $F_A = m_A a_A = 1.0\times 0.15 = 0.15\ \text{N}$

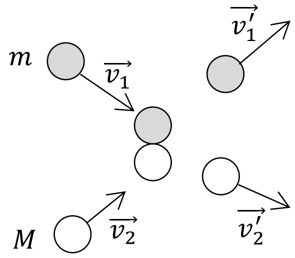
抵抗力のした仕事の大きさは

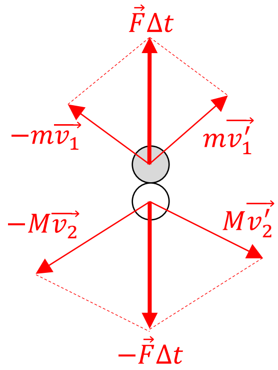
$W_B = 0.10\times\frac{0.179-0.158}{2} = 0.105\times 10^{-2}\ \text{J}$　$W_A = 0.15\times\frac{0.179-0.158}{2} = 0.1575\times 10^{-2}\ \text{J}$

と考えられる。これらを配慮すると，$\frac{1}{2}m_A v_A^2 + \frac{1}{2}m_B v_B^2 + W_A + W_B = 3.33\times 10^{-2}\ \text{J}$ となり，ばねの弾性エネルギーに達しない。他にもエネルギーが流出している部分があると思われる。

〔発問〕ここまでは一直線上の衝突現象を扱ってきたが，平面的な衝突（たとえばビリーヤードの球）はどのように扱えばよいのだろうか。作図を用いて説明せよ。

〔板書〕**平面内での衝突**　　　　　　$m\overrightarrow{v_1'} - m\overrightarrow{v_1} = \vec{F}\Delta t$ ， $M\overrightarrow{v_2'} - M\overrightarrow{v_2} = -\vec{F}\Delta t$ を作図すると，





$m\overrightarrow{v_1} + M\overrightarrow{v_2} = m\overrightarrow{v_1'} + M\overrightarrow{v_2'}$　として，作図または成分表示

$m(v_{1x}, v_{1y}) + M(v_{2x}, v_{2y}) = m(v_{1x}', v_{1y}') + M(v_{2x}', v_{2y}')$　で考える。

平面内での衝突実験

※　添付の映像を見てください。

（説明）十円玉が滑った距離の平方をとる理由は？

十円玉と面との間の動摩擦係数を μ ，初速 v ，重力加速度 g ，十円玉の質量 m ，止まるまでにすべった距離を l とすると，（運動エネルギーの変化）＝（動摩擦力のした仕事）より，

$\frac{1}{2}m \cdot 0^2 - \frac{1}{2}mv^2 = \mu mgl\cos 180^\circ$　$\therefore \boldsymbol{v} = \sqrt{2\mu g \boldsymbol{l}}$　となり，**初速はすべった距離の平方にに比例する**。

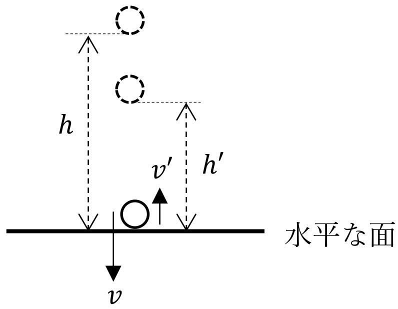
〔発問〕ところで，床や壁との衝突（はね返り）はやはり運動量保存と反発係数で考えるのだろうか。自由落下させたボールが水平な面ではね返る例で検討しなさい。

〔板書〕**水平な面でのはね返り**

面にぶつかる直前の速さ　v

跳ね返った直後の速さ　v'

反発係数　e　として，反発係数の式は，



鉛直下方を正として，$e = -\dfrac{(-v') - 0}{v - 0} = \dfrac{v'}{v}$

ボールの質量　m

面の質量　M　として，運動量保存の式は，

$mv + M \cdot 0 \neq m(-v') + M \cdot 0$　となり，反発係数の式は成り立つが，運動量保存の法則は成り立たない。

理由は？　面が外部から力を受けるからである。

『内力以外の力がはたらくと運動量保存の法則が成り立たない』

自由落下する高さ　h

はね返る高さ　h'

$\dfrac{h'}{h} = e^2$　　　理由は，$v^2 - 0^2 = 2gh$　，$0^2 - v'^2 = 2(-g)h'$

〔グループ活動〕

机とボールの反発係数の測定

　次のボールを 1m と 50cm の高さから自由落下させて，はね返る高さを測定しなさい。また，ボールと机との間の反発係数を求めよ。

① 硬式テニスボール

② 軟式テニスボール

③ 卓球ボール

④ スーパーボール

　理論計算によると，ボールがはね返りを繰り返し止まるまでの時間は $T=\dfrac{1+e}{1-e}\sqrt{\dfrac{2h}{g}}$ となる。

　求めた反発係数から T を計算し，理論通りになるか確かめよ。また，等比無限級数を用いて理論式を導け。

最初の机までの落下時間を t_0 として，$h=\dfrac{1}{2}gt_0^2$，$v=gt_0$

1 回目にはね返った直後の速さを v_1，その後最高点までの時間を t_1 として，$v_1=ev$，$t_1=\dfrac{v_1}{g}=et_0$

n 回目にはね返った直後から 最高点までの時間を t_n として，$t_n=e^n t_0$

最初から n 回目にはね返り再び机にぶつかる直前までのトータルの時間を T_n として，

$T_n=t_0+2t_1+\cdots+2\,t_n=(1+2e+\cdots+2e^n)t_0$ $\therefore T_n-eT_n=(1+e-2e^{n+1})t_0$

$|e|<1$ より $n\to\infty$ のとき $e^{n+1}\to 0$ である。したがって，$\mathrm{T}=\dfrac{1+e}{1-e}t_0=\dfrac{1+e}{1-e}\sqrt{\dfrac{2h}{g}}$

衝突を扱うときの 3 つのパターンを意識せよ。

① 外力，エネルギーの付加がないとき，「運動量保存」と「反発係数」を使う。

② 分裂（エネルギーの付加がある）とき，「運動量保存」のみ使う。

③ 面でのはね返りのとき，「反発係数」のみ使う。