変圧器の電力は？

先生：「変圧器の電力」の動画，見ましたか？

生徒：見たんだけど，勉強したこととあまりにも違うんで，混乱しちゃった。

先生：どんなところが変だと思ったか教えてください。

生徒：え～と，いっぱいあるんで整理しながら話すね。

まず，１次コイルと２次コイルの巻き数の比が電圧の比と同じになること。

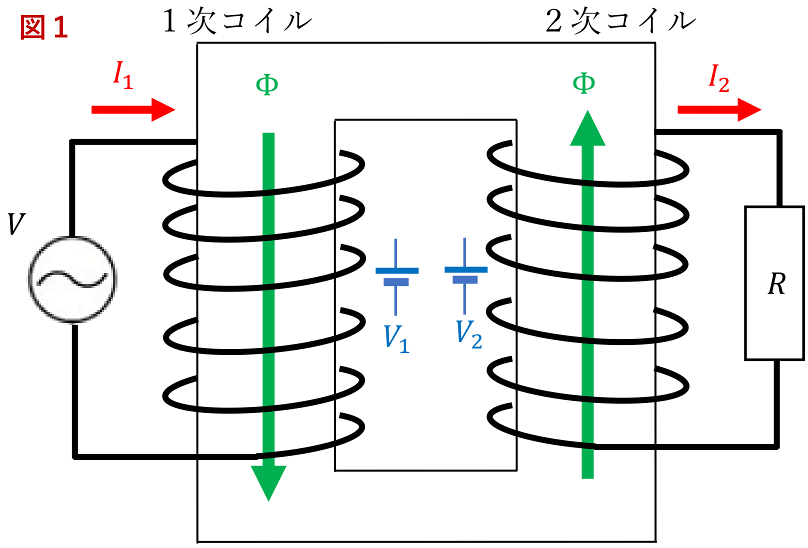
$\dfrac{N_1}{N_2} = \dfrac{V_1}{V_2}$　これはＯＫ。

だけど，確か理想的変圧器は電力が同じになるって習ったけど，

$V_1 I_1 = V_2 I_2 \quad \therefore \dfrac{N_1}{N_2} = \dfrac{I_2}{I_1}$

になっていないよ。

図１



なんか，消費されない電力と消費される電力があるようだけど，どう見分ければいいの？

それから，実験とは直接関係ないと思うけど，相互誘導の公式 $V_2 = -M\dfrac{\varDelta I_1}{\varDelta t}$ と巻き数の比が電圧の比になることとの関係がわかんない。

もう一つ，自己誘導の公式 $V_2(?) = -L_2\dfrac{\varDelta I_2}{\varDelta t}$ は相互誘導の公式に含まれているの？

先生：よ～し。全部まとめて完全理解しましょう。

まず，**図１**を見ながら，「電流」の変化により「磁束」が変化し「電圧」が発生することを確認しましょう。

１次コイルに流れている電流 I_1 が増加すると，１次コイルを貫く磁束線の本数 Φ が増加して，１次コイルに電圧 V_1 が発生する。このとき発生する電圧は右手でグーを作り，親指は？

生徒：上！

先生：正解。磁束線の増加を妨げる向きの電流を流す方向に電圧が発生します。

生徒：でも先生，４本の指と今流れている電流の向きが逆だよ。発生した電圧で電流が流れなくなるんじゃないの？

先生：このとき，電圧は発生しますが，それによって電流が０になることはありません。不思議ですが，電流の変化がコイルに電圧を発生させ，その電圧が常に電源電圧とつりあっているのです。

生徒：ふ～ん…。

先生：では，続けます。

Φ 本の磁束線は鉄芯の中を通り，２次コイルを図の向きに貫く。したがって，１次コイルの電流 I_1 が増加して Φ が増加すると，２次コイルには…。

生徒：右手親指は下！

先生：Good！次のようになりますよ。

２次コイルに電圧 V_2 が発生する。この電圧により電流 I_2 が流れる。電流の値はオームの法則 $V_2 = RI_2$ で決まる。

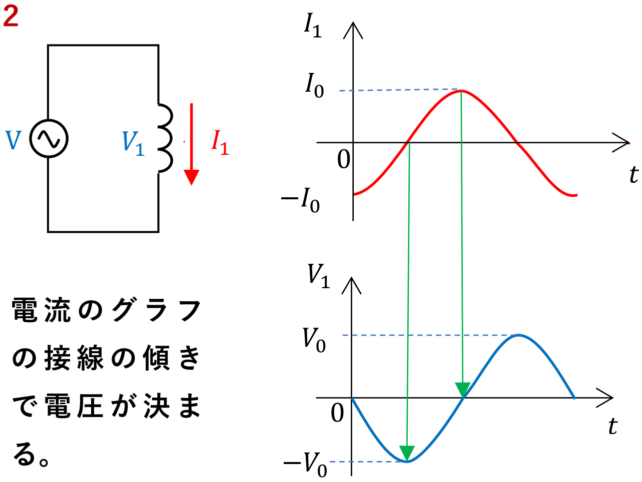
生徒：さっきと違って，今度は電圧の向きに電流が流れるんだね…。混乱してきちゃった。

先生：…よ～し，では次のように説明してみましょう。

１次コイルの電流は電源電圧 $V = V_0 \sin \omega t$ によって流れるのだけれども，**電源電圧とコイルの電圧が常につり合った状態になるように電流が発生する**のです。このときコイルに発生する電圧は $V_1 = -L_1 \dfrac{\varDelta I_1}{\varDelta t}$ で決まります。つまり，コイルの電圧は電流の**値**ではなく，電流の**変化**によって決まるのです。（**図２**参照）

２次コイルの方は，$V_2 = \dfrac{N_2}{N_1} V_1$ を電源として電流が流れます。どの瞬間も「オームの法則」が成り立っているので，電圧と電流の形は同じようになります。（**図３**参照）

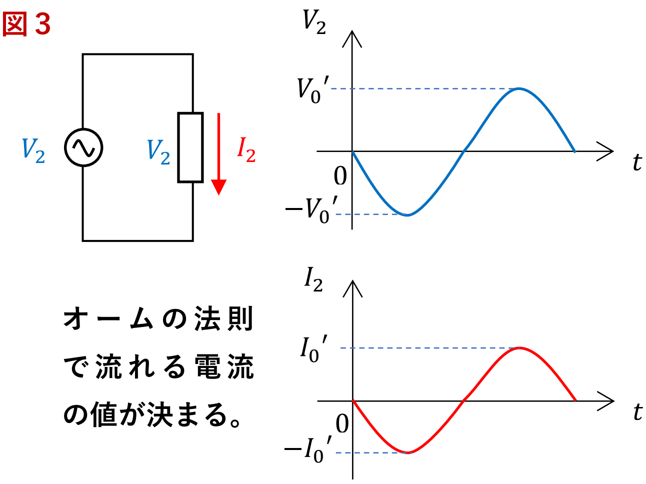
図２



電流のグラフの接線の傾きで電圧が決まる。

※ 消費電力 $P = V_1 I_1$ は平均すると０になります。つまりコイルで電力は消費されません。

図３



オームの法則で流れる電流の値が決まる。

※ 消費電力 $P = V_2 I_2$ は平均すると $\bar{P} = \dfrac{1}{2} V_0' I_0' = \dfrac{V_0'}{\sqrt{2}} \dfrac{I_0'}{\sqrt{2}}$ になります。

生徒：ちょっとまってよ，先生。なんか変だよ。だって，これだと１次コイルの消費電力が０なのに，２次コイルでは電力が消費されていることになるよ。２次コイルの消費電力はどこから来たの？それから，１次コイルでは電流の変化がコイルに電圧を生じさせるっていったけど，２次コイルを流れる電流の変化による電圧は発生しないの？
それから，授業で習ったのとコイルの電圧と電流のずれ方が違うよ！確か授業では，図の電圧を上下ひっくり返した形になっていたよ。

先生：ギャフンだ！よくそのことに気づきましたね。

生徒：先生，ギャフンは古すぎるよ。

先生：実は，鉄芯を貫く磁束線は１次コイルと２次コイルの電流が作る磁束線の和になります。向きが逆の場合は引き算となります。これで発生する電圧を考えると全て解決するのでやってみましょう。⊿で扱ったところは微分になるけど大丈夫ですか。

生徒：微分大好き！

先生：よ～し，ではまず「コイルの電圧と電流のずれ方」について。実は，教科で習ったのは，電源の電圧と流れる電流の関係なのです。教科書では交流電源 $V = V_0 \sin \omega t$ にコイルをつないだときの電流が $I = -I_0 \cos \omega t$ となっていたはずです。電源電圧を用いると，$V = L\dfrac{dI}{dt}$ となります。

生徒：ほほ～。

先生：さて，本題に入ります。これから使う公式の確認をしましょう。ちなみに，式に出てくる±は，図１の磁束の向きを基準に決められていますが，あまり気にしていると訳がわからなくなるので後で整理した方がいいです。

【公式】

長さ l，巻き数 N のコイルに電流 I を流したとき内部にできる磁場は　$H = \dfrac{N}{l}I$

コイル内部に透磁率 μ の鉄芯を挿入したとき，コイル内部の磁束密度は　$B = \mu H$

コイルの断面積を S とすると，コイル内部の磁束（磁束線の本数）は　$\Phi = BS$

コイルを貫く磁束線の本数が変化したとき，コイルに発生する電圧は　$V = -N\dfrac{d\Phi}{dt}$

生徒：オームの法則 $V = RI$ も使うよね。

先生：おう，そうであった。では，始めるよ。コイルの長さ，断面積は１次コイルと２次コイルで同じとします。

１次コイルの電流がつくる磁束は $\Phi_1 = \mu\dfrac{N_1}{l}I_1S$，２次コイルの電流がつくる磁束は $\Phi_2 = \mu\dfrac{N_2}{l}I_2S$

鉄芯を貫く磁束は $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$

各コイルの電圧は $V_1 = -N_1\dfrac{d\Phi}{dt}$，$V_2 = -N_2\dfrac{d\Phi}{dt}$　これから　$\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{N_1}{N_2}$　が求まった！

次に　Φ　を代入して，

$$V_1 = -\frac{\mu {N_1}^2 S}{l}\frac{dI_1}{dt} - \frac{\mu N_1 N_2 S}{l}\frac{dI_2}{dt} = -L_1\frac{dI_1}{dt} - M\frac{dI_2}{dt} \quad V_2 = -\frac{\mu {N_2}^2 S}{l}\frac{dI_2}{dt} - \frac{\mu N_1 N_2 S}{l}\frac{dI_1}{dt} = -L_2\frac{dI_2}{dt} - M\frac{dI_1}{dt}$$

となる。L_1，L_2 は自己インダクタンス，M は相互インダクタンスである。

生徒：なんかすっきりした感じになったね。でも，教科書の公式 $V_2 = -M\dfrac{dI_1}{dt}$ はうそなの？

先生：２次コイルに電流が流れていないとき $\dfrac{dI_2}{dt} = 0$ で $V_2 = -M\dfrac{dI_1}{dt}$ となります。２次コイルに電流を流すと I_1 が変化するので $V_2 = -L_2\dfrac{dI_2}{dt} - M\dfrac{dI_1}{dt}$ で計算しなければならないことになります。

でも，実験動画で確認してほしいんですが，２次コイルに電流を流しても V_2 の値は変化しません。この後出てくる理論値を代入しても，V_2 の値が変化しないことが証明できます。

生徒：教科書って，そんなあやふやでいいの？

先生：う～む…。ひとまず，つづきをやろう。

電源電圧を $V = V_0 \sin\omega t$ とすると，V_1 はこれと常につりあっているので，$V_1 = -V_0 \sin\omega t$

したがって，$V_2 = \dfrac{N_2}{N_1}V_1 = -\dfrac{N_2}{N_1}V_0 \sin\omega t = -{V_0}' \sin\omega t$

オームの法則により，$I_2 = \dfrac{V_2}{R} = -\dfrac{{V_0}'}{R}\sin\omega t = -{I_0}' \sin\omega t$

$V_1 = -L_1\dfrac{dI_1}{dt} - M\dfrac{dI_2}{dt}$ に代入して整理すると，$\dfrac{dI_1}{dt} = -\dfrac{V_0}{L_1}\sin\omega t + \dfrac{N_2}{N_1}I_0'\omega\cos\omega t$ これを積分して，

$I_1 = \dfrac{V_0}{\omega L_1}\cos\omega t + \dfrac{N_2}{N_1}{I_0}'\sin\omega t$　微分して元の式になるか確認してみよう。

生徒：すご～い！よ～し，１次コイルと２次コイルの電力計算してみようかな。

$\sin\omega t \times \cos\omega t = \dfrac{1}{2}\sin 2\omega t$ の平均は０，$\sin\omega t \times \sin\omega t = \dfrac{1}{2}(1-\cos 2\omega t)$ の平均は $\dfrac{1}{2}$ を使って，

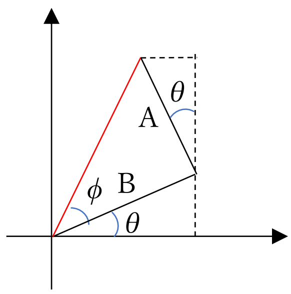
２次コイルの消費電力 $P_2 = V_2 I_2$ の平均値は $\overline{P_2} = \dfrac{1}{2}V_0' I_0'$，

１次コイルの消費電力 $P_1 = V_1 I_1$ の平均値は $\overline{P_1} = \dfrac{1}{2}\dfrac{N_2}{N_1}V_0 I_0' = \dfrac{1}{2}{V_0}'{I_0}'$　同じになっちゃった。

先生：Very　good！それでは，もう一つ問題です。$A\cos\theta + B\sin\theta$　＝？

生徒：ちょっと待ってね…，いつも図を描いて思い出してるんだ。

$A\cos\theta + B\sin\theta = \sqrt{A^2+B^2}\sin(\theta+\phi)$　ただし，$\tan\phi = \dfrac{A}{B}$



先生：よろしい。これを使うと次のことがわかります。

$I_1 = \dfrac{V_0}{\omega L_1}\cos\omega t + \dfrac{N_2}{N_1}{I_0}'\sin\omega t$

２次コイルに電流が流れていないとき，１次コイルを流れる電流

２次コイルに電流が流れたとき，１次コイルを流れる電流の**増加分**

$\dfrac{V_0}{\omega L_1}$ は２次コイルに電流が流れていないとき，１次コイルを流れる電流の最大値です。これを $\sqrt{2}$ で割った値が，動画の 0.16A になります。${I_0}'$ は２次コイルに流した電流の最大値です。これを $\sqrt{2}$ で割った値が，動画の２次コイルに流れる電流となります。２次コイルに 100Ω の抵抗をつないだとき 0.1A，20Ω の抵抗をつないだときは 0.5A でした。

$\dfrac{N_2}{N_1} = \dfrac{1}{10}$ なので，１次コイルの電流の増加分を測定できたとすると，100Ω の抵抗をつないだとき 0.01A，20Ω の抵抗をつないだとき 0.05A となります。しかし，**残念ながらこの電流を単独で調べることはできません**。１次コイルの電流を電流計で測定すると，理論上は 100Ω の抵抗をつないだとき $\sqrt{0.16^2 + 0.01^2} = 0.1603\text{A}$，

20Ω の抵抗をつないだとき $\sqrt{0.16^2 + 0.05^2} = 0.1676\text{A}$ になります。

生徒：先生，**あの動画まずいんじゃない？**

先生：確かに……。

生徒：でも，どうして理論値より１次コイルの電流値が大きくなったの？

先生：2 次コイルの抵抗以外で消費される電力があるためです。変圧器を使用してると，熱くなってきます。これは,「鉄芯の中に発生した渦電流」や「鉄芯が磁化される」ときに熱エネルギーが発生するためです。その分，1 次コイルで供給する電力が増加しているのです。

生徒：な〜る。なんかこれでモヤモヤがすっきりした感じ。でも，心配…。