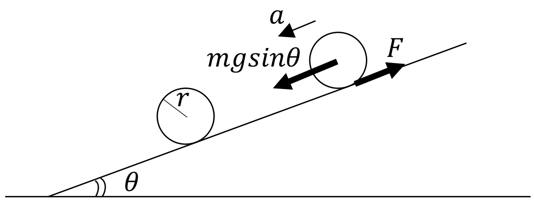
4 (2)　「慣性モーメント」

〔ねらい〕物体の慣性モーメントは質量の分布状態によって異なること，および力学的エネルギー保存の法則は回転運動のエネルギーも含めて成り立つことを調べる。

〔原理〕右図のように，半径 r ，質量 m の円筒（又は円柱）が，傾斜角 θ の斜面上を滑ることなく回転しながら落ちるものとする。



§1　慣性モーメント

（１）円筒の重心の運動方程式は，加速度を a ，斜面からはたらく摩擦力を F とすると，

$$ma = mgsin\theta - F \qquad \cdots \quad ①$$

重心のまわりの円筒の回転運動方程式は，慣性モーメントを I ，角加速度を β とすれば，

$$I\beta = Fr \qquad \cdots \quad ②$$

また， a と β との間には， $a = r\beta$ … ③ の関係がある。

①，②，③より F ，β を消去し，I を求めると，

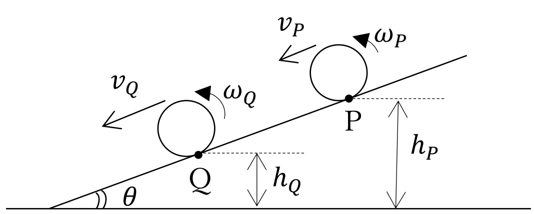
$$I = (mgsin\theta - ma)\frac{r^2}{a} = \left(\frac{gsin\theta}{a} - 1\right) \cdot mr^2 \qquad \cdots \quad ④$$ となる。

（２）運動方程式（質量）×（加速度）＝（力）の「質量」が力を加えたときの「動きにくさの度合い」であるのと同様に，回転運動方程式（慣性モーメント）×（角加速度）＝（力のモーメント）における「慣性モーメント」は「回りにくさの度合い」の指標となる。いま，同じ半径 r ，質量 m の円筒と円柱を比べると、質量の分布が違うため慣性モーメントは異なる値となる。

④式より，質量の分布による違いは $\left(\frac{gsin\theta}{a} - 1\right)$ で比較できることがわかる。

この実験では円筒として中空の牛乳瓶、円柱として砂の入った牛乳瓶を用いる。円筒と円柱の質量は違うが、質量の分布により決定される値 $\left(\frac{gsin\theta}{a} - 1\right)$ を比較する。

§２　力学的エネルギー保存の法則



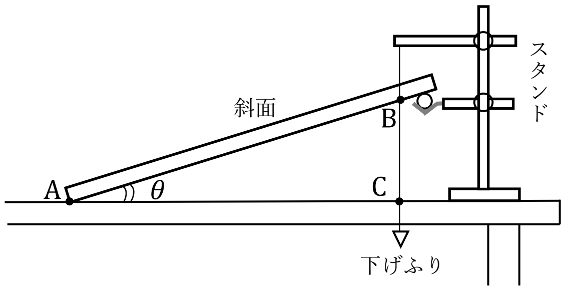
右図のように，円筒（又は円柱）が斜面上の２点P，Qを通過するときの速度，角速度をそれぞれ v_P ，v_Q ，ω_P ，ω_Q とする。また，その高さをそれぞれ h_P ，h_Q とするとき，物体がPからQに落ちる間に失われる位置エネルギーが全て重心の運動エネルギーと，重心のまわりの回転運動エネルギーの増加となるとすれば，§１の④式の $\left(\frac{gsin\theta}{a} - 1\right)$ を k と示すことにして，

$$mg\left(h_P - h_Q\right) = \frac{1}{2}m\left(v_Q^2 - v_P^2\right) + \frac{1}{2}I\left(\omega_Q^2 - \omega_P^2\right) = \frac{1}{2}m\left(v_Q^2 - v_P^2\right) + \frac{1}{2}kmr^2\left(\frac{v_Q^2}{r^2} - \frac{v_P^2}{r^2}\right) = \frac{1}{2}m\left(v_Q^2 - v_P^2\right)(1 + k)$$

の関係式が成り立つことになる。

〔準備〕試料（中空の牛乳瓶と砂入りの牛乳瓶），斜面，下げふり，巻尺，記録タイマー，記録テープ，セロハンテープ，上皿自動秤，ノギス，鉄製スタンド（２個），画鋲，方眼紙

〔方法〕



（１）試料の外径 $2r$ をノギスで，質量 m を上皿自動秤で測る。

（２）斜面を，その縁が実験台の縁に一致するようにして置き，スタンドで支え，同じスタンドに別の自在ばさみを用いて，下げふりを右図のように吊す。($\overline{\mathrm{AB}}$ がなるべく大きくなるようにするとよい）

（３）別のスタンドで記録タイマーを支え，斜面の上端近くに置く。

（４）巻尺を用いて，図の $\overline{\mathrm{AB}}$ ， $\overline{\mathrm{BC}}$ を測定し，$sin\theta$ を求める。

（５）試料の回転軸に記録テープをセロハンテープで貼り付け，試料を転がり落とす。

（６）記録テープの打点の座標 x を読み取り，$v-t$グラフ（直線）を画いて，その傾きから加速度 a を求める。

（７）中空瓶について，$k_1 = \dfrac{gsin\theta}{a_1} - 1$ ，$I_1 = k_1 m_1 r_1^2$

砂入り瓶について，$k_2 = \dfrac{gsin\theta}{a_2} - 1$ ，$I_2 = k_2 m_2 r_2^2$

として，k_1 ，k_2 ，I_1 ，I_2 を算出する。

（８）必要な値を用いて，力学的エネルギー保存の法則が成り立つか調べる。

〔実験上の注意〕

・牛乳瓶を床に落とさないようよく気をつけること。

・記録タイマーのカーボン紙は，デコラ版にほぼ一杯にかかるようにして中央を画鋲でとめる。記録テープが走るとき，カーボン紙も軽く回転するように中央の穴は大きくあける。打点が淡くなったら新しいものと交換する。また幅加減金具も利用するとよい。

・$v-t$グラフを画くとき，平均の速さは中央時刻上に記す。直線を引いた後，時間と速さは直線上の値を用いること。

〔測定値の例〕

（１）試料の外径と質量

ノギスのゼロポイント　0.00mm

		中空瓶	砂入り瓶
外径(mm)	1	56.45	56.10
	2	56.00	56.70
	3	56.40	56.25
	平均	56.28	56.35
外半径(mm)		28.14	28.18
質量(kg)		0.256	0.592

（２）斜面の傾斜角

$$sin\theta = \frac{\overline{BC}(\mathrm{cm})}{\overline{AB}(\mathrm{cm})} = \frac{37.2-14.2}{136.9-8.2}$$

$$= \frac{23.0}{128.7} = 0.1787$$

したがって，

$gsin\theta = 9.80 \times 0.1787 = 1.751(\mathrm{m/s^2})$

※重力加速度は国土地理院による本県の値を用いた。

（３）運動の記録

		中空瓶			砂入り瓶		
打点番号	時刻(s)	選んだ点の座標(cm)	間隔(cm)	平均の速さ(m/s)	選んだ点の座標(cm)	間隔(cm)	平均の速さ(m/s)
0	0.00	21.14			19.31		
			3.99	0.399		4.37	0.437
1	0.10	25.13			23.68		
			4.79	0.479		4.87	0.487
2	0.20	29.92			28.55		
			5.70	0.570		6.37	0.637
3	0.30	35.62			34.92		
			6.70	0.670		7.78	0.778
4	0.40	42.32			42.70		
			7.52	0.752		7.90	0.790
5	0.50	49.84			50.60		
			8.39	0.839		9.72	0.972
6	0.60	58.23			60.32		
			9.34	0.934		10.56	1.056
7	0.70	67.57			70.88		
			10.15	1.015		11.16	1.116
8	0.80	77.72			82.04		
			10.96	1.096		13.09	1.309
9	0.90	86.68			95.13		

（４）加速度（グラフより）

中空瓶　$a_1 = \frac{1.06 - 0.50}{0.80 - 0.17} = \frac{0.56}{0.63} = 0.889(\mathrm{m/s^2})$

砂入り瓶　$a_1 = \frac{1.17 - 0.52}{0.75 - 0.15} = \frac{0.65}{0.60} = 1.08(\mathrm{m/s^2})$

（５）慣性モーメントにおける質量分布による違い

中空瓶　$k_1 = \frac{gsin\theta}{a_1} - 1 = \frac{1.751}{0.889} - 1 = 0.97$

砂入り瓶　$k_2 = \frac{gsin\theta}{a_2} - 1 = \frac{1.751}{1.08} - 1 = 0.62$

（６）慣性モーメント

中空瓶　$I_1 = k_1 m_1 r_1^2 = 0.970 \times 0.256 \times (28.14 \times 10^{-3})^2 = 2.0 \times 10^{-4}(\mathrm{kg \cdot m^2})$

砂入り瓶　$I_2 = k_2 m_2 r_2^2 = 0.621 \times 0.592 \times (28.18 \times 10^{-3})^2 = 2.9 \times 10^{-4}(\mathrm{kg \cdot m^2})$

（７）力学的エネルギー保存の法則

中空瓶について調べてみると次のようになる。

斜面上の点 P として打点番号 0 の点を，点 Q として打点番号 8 の点をとる。その座標 x は斜面に沿って，表より $x_P = 21.14\text{cm}$ ，$x_Q = 77.72\text{cm}$ である。また速度 v は，グラフより $v_P = 0.35\text{cm/s}$ ，$v_Q = 1.06\text{cm/s}$ と読み取ることができる。したがって，失われた位置エネルギー E_1 は

$E_1 = mg(h_P - h_Q) = mg(x_P \sim x_Q) sin\theta = 0.256 \times 9.80 \times (77.72 - 21.14) \times 10^{-2} \times 0.1787 = 0.254\ \text{J}$

一方運動エネルギーと回転運動エネルギーの増加 E_2 は

$$E_2 = \frac{1}{2}m(v_Q^2 - v_P^2)(1 + k) = \frac{1}{2} \times 0.256 \times (1.06^2 - 0.35^2) \times (1 + 0.970) = 0.2524$$

となり，$E_1 = E_2$ であることが検証できた。

〔参考〕

・厚さの無視できる（半径に比べて厚さの薄い）円筒，均質な（密度が一定の）円柱について理論計算すると，$k_1 = 1$ ，$k_2 = 0.5$ となる。

・「平均の速さ」と「中央時刻」との関係について

一直線上を一定の加速度 a で運動する物体が，原点を初速 v_0 で通過してから時間 t 経過したときの変位 x 及び速さ v は，それぞれ　$x = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$　…①　，　$v = v_0 + at$　…②　となる。

いま $t = t_1$ のとき $x = x_1$ ，$t = t_2$ のとき $x = x_2$ とすると，

$x_1 = v_0 t_1 + \frac{1}{2}at_1^2$　…③　，$x_2 = v_0 t_2 + \frac{1}{2}at_2^2$　…④　である。したがって，$t_1 \sim t_2$ の平均の速さ v_{12} は

$$v_{12} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{(v_0 t_2 + \frac{1}{2}at_2^2) - (v_0 t_1 + \frac{1}{2}at_1^2)}{t_2 - t_1} = \frac{v_0(t_2 - t_1) + \frac{1}{2}a(t_2 + t_1)(t_2 - t_1)}{t_2 - t_1} = v_0 + \frac{1}{2}a(t_2 + t_1)$$

一方②式の t に，$t_1 \sim t_2$ の中央時刻 $\frac{t_1 + t_2}{2}$ を代入すると，$v = v_0 + a\frac{t_1 + t_2}{2}$ となるから，v_{12} と一致する。すなわち等加速度運動に於いては，２つの時刻の間の平均の速さは，中央時刻での瞬間の速さに等しいことがわかる。